

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ – BOLZANO

ΟΝΟΜΑ:

ΕΠΩΝΥΜΟ:

Θέμα 1ο

A. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής στο $[\alpha, \beta]$; (μον. 04)

B. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano. (μον. 05)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σαν Σωστές ή Λανθασμένες

i) Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

ii) Αν $f(x) < \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ στο $\mathbb{R}$, τότε πάντοτε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$.

iii) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

iv) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \ell$, με $\ell \neq 0$ τότε κατ' ανάγκη $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\ell$.

v) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$.

vi) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$.

vii) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε έχει πάντοτε μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στα άκρα του διαστήματος.

viii) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$. (μον. 16)

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (μον. 15)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2015}$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες. (μον. 10)

Θέμα 3ο

Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και για κάθε $x \in [-1,1]$ ισχύει ότι $f(x) \leq 2x + \frac{f(-1)+f(1)}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{f(-1)-f(1)}{4} = -1$. (μον. 10)

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1,1)$, τέτοιο ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(x_0, f(-1)+2)$. (μον. 15)

Θέμα 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\frac{2xf(x) - x + 1}{1 + f^2(x)} = 1$

για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-2 - \sqrt{2})\eta\mu(2-x)}{x^2 - 3x + 2}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f . (μον. 12)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon) : y = x + \kappa$ σε δύο σημεία, τα $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ με $1 \leq \alpha < \kappa < \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $\alpha\beta(f(\xi) - \kappa) = \kappa\xi^2$. (μον. 08)

γ) Αν $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x}$, με $x \in [1, +\infty)$, να υπολογίσετε το όριο

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1007}{x} \right)$. (μον. 05)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ