

2ΩΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΟΡΙΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑ 1ο

**ΘΕΜΑ Α ( 5+5+15=25 )**

α .Πότε μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της ;

β. Διατυπώστε το Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής

γ . Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους :

γ<sub>1</sub>. Αν  $f$  συνεχής στο  $x_0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

γ<sub>2</sub>. Αν  $f(x) \geq 0$  κοντά στο  $x_0$  και υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  τότε

πάντα ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$

γ<sub>3</sub>. Αν  $f$  γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της τότε για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 \neq x_2$  ισχύει  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

γ<sub>4</sub>. Αν η  $f$  είναι ορισμένη σε διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σε αυτό τότε αυτή ή είναι θετική ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ .

γ<sub>5</sub>. Αν  $0 < \alpha < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$

**ΘΕΜΑ Β ( 5+7+6+7=25 )**

Δίνεται η συνάρτηση 
$$f(x) = \begin{cases} e^x + x & , \quad x \leq 0 \\ \frac{2}{x} - \ln x - 5 & x > 0 \end{cases}$$

α) Δείξτε ότι  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$ .

β) Βρείτε τα  $f((-\infty, 0])$  και  $f((0, +\infty))$ .

γ) Δείξτε ότι η  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς δύο λύσεις στο  $\mathbb{R}$ , έστω  $x_1 < x_2$  αυτές, και ότι :  $x_2 - x_1 < 2$ .

δ) Υπολογίστε το όριο :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f^2(x) - e^x f(x)}{1 - \sin x}$

**ΘΕΜΑ Γ(9+9+7=25)**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :

$$\bullet \frac{\eta\mu x + 2x^2 + 7x}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{2x^2 + 5x + 7}{x+1} \quad , \quad \text{για κάθε } x > 0 .$$

α) Δείξτε ότι :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 3$

β) Υπολογίστε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{(x+1)f(x) - 2x^2 + 5}$

γ) Δείξτε ότι :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x) \cdot f(2x)}{x} - 8x \right] = 18$

**ΘΕΜΑ Δ(9+9+7=25)**

Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν :

$$\bullet 2(f(x) + x)^2 = 4 + 2x\sqrt{x^2 + 4} + f^2(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

$$\bullet f(2) = 4\eta\mu\theta - 2 \quad , \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$$

α) δείξτε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) + 2x$  διατηρεί πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

β) Δείξτε ότι  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και υπολογίστε τη γωνία  $\theta$ .

γ) αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  δείξτε ότι η εξίσωση  $\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f(\beta)}{x-2} = 0$  έχει στο  $(1,2)$  ακριβώς μια λύση .