

Θέμα 1

- A.** Χαρακτηρίσετε τα ακόλουθα σημειώνοντας στο γραπτό σας αντίστοιχα Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).
- Κάθε συνάρτηση που είναι συνεχής και μη σταθερή, έχει σαν σύνολο τιμών ένα ανοικτό διάστημα.
 - Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $(f(x))^2 = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι, πάντα, συνεχής.
 - Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε ο αριθμός $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της.
 - Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και $\alpha < \kappa < \beta$, τότε, πάντα, υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \kappa$.
 - Η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$ παίρνει μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή στο διάστημα $[1, 3]$.
 - Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ισχύει το θεώρημα ελάχιστης και μέγιστης τιμής στο διάστημα $[0, 2]$.
 - Για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x \in [-2, 1) \\ x^2+2 & \text{αν } x \in [1, 2] \end{cases}$ είναι $f(-2) = -1$ και $f(2) = 6$.
Τότε για κάθε αριθμό η με $-1 < \eta < 6$, υπάρχει, πάντα, $\xi \in (-2, 2)$ με $f(\xi) = \eta$.
 - Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο A και ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ με $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$, τότε υπάρχει, πάντα, ένας τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιος ώστε $f(\xi) = 0$.
 - Έστω η συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \Delta$. Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε κατ' ανάγκη, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
 - Αν η συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$, τότε και η συνάρτηση f^2 είναι συνεχής στο x_0 .
 - Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η συνάρτηση g με $g(x) = e^{f(x)}$ έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο $[\alpha, \beta]$.
 - Αν f μια συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Μονάδες 18

- B.** Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

Μονάδες 7

Θέμα 2

- A.** Αν για μια συνεχή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -10$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10$, τότε να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 5$.

Μονάδες 10

- B.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} (\alpha-1)x + \beta + 2 & , \quad -2 \leq x < -1 \\ 2\beta - \alpha & , \quad x = -1 \\ \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1} & , \quad -1 < x \leq 2 \end{cases}$.

- i. Να προσδιορισθούν οι παράμετροι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-2, 2]$.

Μονάδες 10

- ii. Στη συνέχεια να βρεθούν τα x_0 του θεωρήματος του Bolzano στο $(-2, 2)$.

Μονάδες 5

Θέμα 3

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$6x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 6x + 18.$$

- i. Να αποδείξετε ότι: $|f(x) - 9| \leq |x - 3|^2$.

Μονάδες 9

- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

Μονάδες 8

- iii. Να προσδιορίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - 9}{x - 3} & \alpha \vee x \neq 3 \\ \alpha^3 + 64 & \alpha \vee x = 3 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

Μονάδες 8

Θέμα 4

$$\text{Έστω η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^2(\alpha x) + \eta\mu^2(5x)}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ \alpha^2 + 25 & , \quad x = 0 \end{cases} \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

- A. Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Μονάδες 5

- B. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

- Γ. Αν επί πλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x) \leq 10\alpha$, τότε:

- i. Αποδείξετε ότι $\alpha = 5$.

Μονάδες 5

- ii. Βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

- iii. Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 49$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

Μονάδες 5