



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΌΝΟΜΑ :

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$;

Μονάδες 3

A2. Πότε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in A$;

Μονάδες 3

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής. **Μονάδες 3**

A4. Να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (Θ.Ε.Τ.), δηλαδή:
Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$.
Αν

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον τέτοιος $x_0 \in (a, \beta)$, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 6

A5. Να χαρακτηρίσετε τα ακόλουθα ως σωστό ή λάθος:

- i.** Αν μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ τότε θα είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- ii.** Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, τότε κατ' ανάγκη, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- iii.** Κάθε συνάρτηση που είναι συνεχής και μη σταθερή, έχει σαν σύνολο τιμών ανοικτό διάστημα.
- iv.** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

- v.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

Μονάδες 10

Να συμπληρώσετε τα κενά:

Για να βρω το σύνολο τιμών χρειάζομαι και

Για να βρω τα πρόσημα της f χρειάζομαι και

ΘΕΜΑ Β

B1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x \cdot e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \end{cases}$

- a.** Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια και ως προς την παραγωγισιμότητα
- b.** Να υπολογισθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

B2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 0$
- $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

a. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

b. Να αποδείξετε ότι για την παράγωγο της f ισχύει ότι $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

c. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

B3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Να

αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = 2f'(x_0)$.

(Μονάδες 6+4+5+4+3+3)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 1$.

- Γ1.** Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .
- Γ2.** Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- Γ3.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,3)$.
- Γ4.** Να λύσετε τις ανισώσεις :
- a. $f^{-1}(\ln x) > x$
- b. $\ln \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 2} > e^{x^2+1} - e^{3x^2}$
- Γ5.** Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f^2(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} + \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} \right)$

(Μονάδες 5+3+5+6+6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha < \beta$ και η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύουν: $f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$ και $|f(x)| < 2015$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ τότε:
Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \alpha + \beta$.
- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x = f(\beta)\eta \mu x + f(\alpha)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \alpha + \beta]$.

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + 4x}{x^2 + 1}$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [-1, 1]$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{f(-1) + 2f(0) + f(1)}{4}.$$

Δ5. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) - h(x) = 2015x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ακόμα ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις ετερόσημες ρ_1, ρ_2 . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) .

(Μονάδες 5+5+5+5+5)

Καλή επιτυχία !

Επιμέλεια θεμάτων

Ανδρέας Δ. Βούζας

Μαθηματικός

MSC IS

MSC OR

Γιώργος Κ. Νιάκας

Μαθηματικός

MSc CS