

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΕ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (9 μονάδες)

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής

(3 μονάδες)

A3. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος»:

1. Οι συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα διάστημα, έχουν σύνολο τιμών επίσης ένα διάστημα.

2. Ισχύει η σχέση : $|\eta\mu x| < |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

3. Αν $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει ότι $kf(x) > 0$ για τιμές του x κοντά στο a .

4. Ισχύει η ισοδυναμία: $|\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

5. Ισχύει η ισοδυναμία: $|\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)| = a$, $a > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -a$

(10 μονάδες)

A4. Δίνεται ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, $a > 0$. Με αυτό το δεδομένο, χαρακτηρίστε τις

παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος».

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = -\infty \quad 2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty \quad 3. \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = +\infty$$

(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$, συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - ax - 2\beta}{x - 1}, & x \neq 1 \\ \beta, & x = 1 \end{cases}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$ και $\beta = -2$ και να γράψετε τον τύπο της $f(x)$. (7 μονάδες)

B2. Να λύσετε στο $(0, +\infty)$ την εξίσωση $f(x) + 2e^{x-1} = 0$. (10 μονάδες)

B3. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{x+2}}{\eta\mu(x-2)}$ (8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται ότι τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g ισχύει η σχέση:

$$(x-3)g(x) \leq x \cdot \eta\mu(x-3), \text{ για κάθε } x \neq 3.$$

i. Να βρείτε το $g(3)$. (5 μονάδες)

ii. Να δείξετε ότι η $g(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 8)$. (5 μονάδες)

Γ3. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(0) = 1 \text{ και } f(x) \cdot (f(x) + 2) = e^{2x} + e^{-2x} + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ τότε:}$$

i. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + e^{-x} - 1$ (8 μονάδες)

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\ln x) = \frac{2}{x} + 2018$, έχει μία ακριβώς ρίζα. (7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής στο $[1,4]$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 3 \cdot e^x}{2^x + 5 \cdot e^x}, \quad f(2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 6x} + x \right) \quad \text{και} \quad f(4) = 2. \text{ Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η}$$

συνάρτηση δεν τέμνει τον xx' , να δείξετε ότι:

Δ1. Η συνάρτηση f παίρνει μόνο θετικές τιμές. (4 μονάδες)

Δ2. Να δείξετε ότι $f(1)=1$, $f(2)=3$ (4 μονάδες), καθώς και ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2$. (4 μονάδες)

Δ3. Να δείξετε ότι η $f(x)$ δεν είναι 1-1, καθώς και ότι υπάρχει

$$x_0, x_0 \in [1,4], \text{ ώστε } f(x_0) = \frac{7f(1,5) + 3f(3,5)}{10} \quad (2+5 \text{ μονάδες})$$

Δ4. Αν, επιπλέον, f γνήσια μονότονη στο $[1,2]$ να λύσετε την εξίσωση:

$$f(f(e^x + x + 1) - 1) = f(4) + 1 \quad \text{στο } [1,2]. \quad (6 \text{ μονάδες})$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α : Α3 : Λ - Σ - Σ - Σ - Λ Α4 : Σ - Λ - Λ

ΘΕΜΑ Β :

B1. Ζητώ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - ax - 2\beta}{x - 1} = f(1) = \beta$. Θέτω $g(x) = \frac{x^3 - ax - 2\beta}{x - 1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 1 - a - 2\beta = 0$

$\Leftrightarrow a = 1 - 2\beta$. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - (1 - 2\beta)x - 2\beta}{x - 1} = \beta \xrightarrow{\text{σχ. Horner}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2\beta)}{x - 1} = \beta \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \beta = -2$

συνεπώς $a = 5$, άρα $f(x) = x^2 + x - 4$.

B2. Θέτω $g(x) = 2e^{x-1} + x^2 + x - 4$, $g(x)$ γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$, μόνη λύση $x = 1$.

B3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 4 - \sqrt{x+2}}{\eta\mu(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x^2 + x - 6}{x-2} - \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}}{\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(x-2)(x+3)}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2}}{\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}} = \frac{19}{4}$

ΘΕΜΑ Γ : Γ1 : i. $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3) = \dots = 3$ ii. Με θεώρημα Bolzano στο $[3, 8]$, $g(8) \leq \frac{8}{5} \eta\mu 5 < 0$

Γ2 : i. $f^2(x) + 2f(x) + 1 = e^x + e^{-x} + 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow |f(x) + 1| = |e^x + e^{-x}|$. Θέτω $g(x) = f(x) + 1 \neq 0$

$g(x)$ συνεχής, $g(0) = 2 > 0$, άρα $g(x) > 0$, συνεπώς $f(x) = e^x + e^{-x} + 1$.

Γ3 : i. Η συνάρτηση $f(\ln x) = x + \frac{1}{x} - 1$, $x > 0$. Οπότε η εξίσωση γίνεται : $x - \frac{1}{x} - 2019 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2019x - 1 = 0$, $\Delta > 0$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες αφού $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, συνεπώς δεκτή είναι μόνο μία ρίζα.

ΘΕΜΑ Δ : Δ1 : Η f διατηρεί πρόσημο, $f(4) > 0$, $f(x) > 0$.

Δ2 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x \left(1 - 3 \left(\frac{e}{2} \right)^x \right)}{2^x \left(1 + 5 \left(\frac{e}{2} \right)^x \right)} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{6}{x}} + 1 \right)} = 3$. Επειδή $f(1) = 1 < 2 < 3 = f(2)$, από ΘΕΤ

υπάρχει $\rho \in (1, 2)$ ώστε $f(\rho) = 2$.

Δ3 : Αφού $f(\rho) = f(4)$, η $f(x)$ δεν είναι 1-1. Επίσης, η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, έστω $f(x) \in [m, M]$, συνεπώς : $7m \leq 7f(1,5) \leq 7M$ και $3m \leq 3f(3,5) \leq 3M$ και με

πρόθεση κατά μέλη η ποσότητα $\frac{7f(1,5) + 3f(3,5)}{10} \in [m, M]$, οπότε με ΘΕΤ προκύπτει.

Δ4. $f(f(e^x + x + 1) - 1) = f(4) + 1 = 3 = f(2) \Leftrightarrow f(e^x + x + 1) - 1 = 2 \Leftrightarrow f(e^x + x + 1) = 3 = f(2)$

$\Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0$, αφού f 1-1 στο $[1, 2]$. Θέτω $g(x) = e^x + x - 1$, g γν. αύξουσα, $g(0) = 0$, η οποία είναι μη δεκτή.