

Διαγώνισμα 7ο



ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A.2 Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $[α,β]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A3. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Bolzano.

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη, **Σωστό - Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

β. Αν για την συνάρτηση f ορίζεται η αντίστροφή της f^{-1} τότε θα ισχύει

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=x, \quad x \in D_f$$

Μονάδες 2

γ. Ισχύει $|\eta \mu x| < |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Μονάδες 2

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

δ. Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x))$

$$\text{τότε ισχύει } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Μονάδες 2

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε θα είναι κατ' ανάγκη συνεχής στο α και στο β .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$.

B1. Να υπολογίσετε τα α, β .

Μονάδες 7

B2. Για $\alpha=3$ και $\beta=-10$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f^2(x_0) = x_0^4 + x_0^3 + 6x_0 + 28$

Μονάδες 7

Έστω συνάρτηση g για την οποία ισχύει $f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 1} - x + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

Μονάδες 5

γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x+1) - g(x))$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι 1-1.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $g(f(x) + x^3 + x) = g(f(x) - \ln x + 2)$.

Μονάδες 6

Γ3. Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι το $(0, +\infty)$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha \cdot e^{g(x)} = 1, \alpha > 0$.

Μονάδες 8

Γ4. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $g(f(\ln x) + 1) = g(x + 2)$, να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

• $e^{-x} (2f(x) + e^{-x}) = x - f^2(x)$ για κάθε $x \geq 0$

• $e^2 f(2) + 1 > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$ για κάθε $x \geq 0$

Μονάδες 7

Δ2.α. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

β. Να αποδείξετε ότι $f(2016) > \frac{f(0) + 2015f(1)}{2016}$.

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 3

Δ3. Έστω ότι $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις ώστε για κάθε $x \geq 0$ να ισχύει $g(h(x)) = 2f(x) + h(x)$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση h αντιστρέφεται.

Μονάδες 4

ii. Η γραφική παράσταση της g , έχει κοινό σημείο με την ευθεία $y=x$.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ