

Διαγώνισμα 6ο
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ'
ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ 1^Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Ποια ιδιότητα έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} ;
(μονάδες 4)
- A2.** Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano.
(μονάδες 4)
- A3.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.
(μονάδες 7)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε ως Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:
- α.** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
 - β.** Αν οι συναρτήσεις f και g είναι 1-1 στο A , τότε και η συνάρτηση $g \circ f$, αν ορίζεται, είναι 1-1.
 - γ.** Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A και $x_0 \in A$, τότε πάντοτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ έχει νόημα.
 - δ.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0) \neq 0$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$.
 - ε.** Αν μια συνάρτηση συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της μπορεί να είναι διάστημα της μορφής $[\gamma, +\infty)$.
- (μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και γνησίως μονότονη, για την οποία ισχύει $x^2 - 1 < f(x) < e^x$ για κάθε $x \geq 0$.

B1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

(μονάδες 7)

B2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = x + 1$ σε σημείο με τετμημένη $\alpha \in (0, 2)$

(μονάδες 9)

B3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+1}$ και να δείξετε ότι η είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $\Delta = [-2, 3]$ και γνησίως φθίνουσα.

Γ1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in [-2, 3]$ ώστε $2f(x_0) = f(-2) + f(3)$

(μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(3x - 7)(f(x) - f(-2)) = (x + 1)(f(3) - f(x))$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο διάστημα $(-2, 3)$.

(μονάδες 6)

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{1}{\eta\mu(x-1)}\right)}{\ln|x-1|}$

(μονάδες 5)

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha > 0$ ώστε η συνάρτηση $g(x) = f(e^x + x - 3)$ να έχει πεδίο ορισμού το $D = [0, \alpha]$ και στη συνέχεια ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο D .

(μονάδες 6+3)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f^3(x) + 3f(x) - e^x = -1, \text{ για κάθε } x \geq 0$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

(μονάδες 7)

Δ2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

(μονάδες 5)

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την f^{-1}

(μονάδες 8)

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) - \ln(x^3 + 2x + 7)}{x^3 - \eta\mu(2017x)}$

(μονάδες 5)