

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ /
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Εξεταζόμενη ύλη: Έως και συνέπειες θεωρήματος Bolzano

Επιμέλεια : Ανδρέας Βούζας

Διαγώνισμα 5ο

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν

- Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$

Μονάδες: 6

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

<<Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ τότε
 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ >>

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας πάνω στην κόλλα σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής

β. Αν η πρόταση είναι αληθής (A) να την αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής (Ψ) να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα

Μονάδες: 1+3

A3. Να διατυπώσετε το θέωρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Μονάδες: 3

A4. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:
Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ τότε

- α.** Η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α, β)
- β.** Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β)
- γ.** Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α, β)
- δ.** Δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β)

Μονάδες: 2

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$
- β.** Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f
- γ.** Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού ελαχίστου
- δ.** Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο
- ε.** Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$

Μονάδες: 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο $\mathbb{R}$, τέτοια, ώστε

- $f^2(x) = 4xf(x) + 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(2) > 4$

B1. Να αποδείξετε ότι

α. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2x$, $x \in \mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

Μονάδες: 5

β. Ο τύπος της συνάρτησης f είναι
$$f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$$

Μονάδες: 5

B2. Να βρείτε αν υπάρχουν, τα όρια

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Μονάδες: 4

β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Μονάδες: 4

B3. Να βρείτε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) + 3x^2 + xf(x) + x^2 \cdot 3^x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{5}\right)^x}{f^2(x) + x^2 + x\eta\mu x}$$

Μονάδες: 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $e^{2f(x)} + e^{f(x)+1} + f(x) - 2e^2 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Μονάδες: 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη της

Μονάδες: 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $e^\xi + e = (2e^2 - \xi) \cdot e^{-\xi}$

Μονάδες: 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Μονάδες: 5

Γ5. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq x$ και να αποδείξετε ότι $f(x) - 1 \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$

Μονάδες: 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $x^2 \cdot f(x) - 2x^5 + 1 - \sin^2 x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}, & x \neq 0 \\ -1 & , x=0 \end{cases}$

Μονάδες: 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα

Μονάδες: 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $f(x) > 2x^3 - 1$

Μονάδες: 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της

Μονάδες: 6

Σας εύχομαι επιτυχία