Ασκήσεις Επανάληψης

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x-\alpha}{x+\beta}$ και $g(x)=e^x$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

για τους οποίους ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha x^2+\beta x+3}{x-1}-x\right)=2$

Α. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Β. Για $\alpha=\beta=1$

i) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g

ii) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x)=f\left(g(x)\right)$

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)$ αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση $h^{-1}(x)$

v) Να λύσετε την ανίσωση $h^{-1}(x)<0$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\alpha-1}{e^x+1}$ και $g(x)=e^x-\beta+7$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

για τους οποίους ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x+15}+\alpha x+\beta\right)=6$

Α. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Β. Για $\alpha=2$ και $\beta=8$

i) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g

ii) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)\cdot g(x)$

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)$ είναι «1-1»

iv) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h^{-1}(x)$

v) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h^{-1}(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $\kappa(x)=e^x+1$, $\varphi(x)=\ln x$ και $g(x)=x$

i) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων κ, φ και g

ii) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f(x)=g(x)-\varphi\left(k\left(x\right)\right)$

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1}(x)$

iv) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(x\right)>0$.

4. i) Να βρείτε συνάρτηση $f(x)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$f(g(x)) = x^3 - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = x - 1$

ii) Αν $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$, να αποδείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και να ορίσετε την $f^{-1}(x)$

iii) Αν f γνησίως αύξουσα τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:
$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$ και $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$

iv) Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f(x)}$ με την $C_{f^{-1}(x)}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - 2x - 4$.

i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in [0,1]$ τέτοιο,
ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3)}{6}$ με $x_1, x_2, x_3 \in [0,1]$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^{2019}) = f(x^2) + f(x^{2020})$, $x > 0$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + \alpha}$ και $g(x) = \beta - 3 - \ln x$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τούς οποίους ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \alpha x + \beta\right) = 3$

A. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 4$

B. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 4$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1»

ii) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1}(x)$

iii) Αν $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1 - x}\right)$, $x \in (0,1)$ να ορίσετε την συνάρτηση $f^{-1}(g(x))$ και να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1^-} f^{-1}(x)$

v) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x}$

με $\alpha\in\mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-\alpha x\right)=\dfrac{5}{2}$

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

Β. Για $\alpha=1$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι «1-1» και να ορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1}(x)$

ii) Να ορίσετε την συνάρτηση $h(x)=f\left(g(x)\right)$ και να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $h(x)$

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)$ είναι «1-1» και να ορίσετε τη συνάρτηση $h^{-1}(x)$

8. i) Να βρείτε συνάρτηση $f(x)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$f\left(g(x)\right)=x^2-2x+3$, για κάθε $x\in[1,+\infty)$, αν $g(x)=x+1$

ii) Αν $f(x)=x^2-4x+3$, $x\in[2,+\infty)$ να αποδείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και να ορίσετε την $f^{-1}(x)$

iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f(x)}$ με την ευθεία $(\varepsilon):y=x$ καθώς και τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}(x)}$ με την ευθεία $(\varepsilon):y=x$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x-\beta)$ και $g(x)=\dfrac{\alpha-\beta}{x}$

με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τούς οποίους ισχύει $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\alpha x^2+3\beta x-5}{x-1}\right)=7$

Α. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Β. Για $\alpha=2$ και $\beta=1$

i) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g

ii) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x)=f\left(g(x)\right)$

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)$ ως προς τη μονοτονία

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)$ αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση $h^{-1}(x)$

v) Μελετήσετε τη συνάρτηση $h^{-1}(x)$ ως προς τη μονοτονία.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει $\dfrac{x}{f(x)}+\dfrac{1}{f'(x)}=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-2xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή και στη συνέχεια ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

ii) Να δείξετε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα

iii) Να δείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρεθεί η $f^{-1}(x)$

11. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $e^{f(x)}+f(x)-x-1=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$

ii) Να δείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρεθεί η $f^{-1}(x)$

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της $f(x)$ είναι κάτω από την ευθεία $y=x$

iv) Να δείξετε ότι $f\left(x^{2019}\right)-f\left(x^{2020}\right)>f\left(x^{2018}\right)-f\left(x^{2017}\right)$ για κάθε $x\in(0,1)$

v) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2-x}-e^{x+3}=-x^2+2x+3$

ΘΕΜΑ Ομογενείς 2011

12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, $x>-1$

i) Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι $(x+1)^e\le e^{x+1}$, για κάθε $x>-1$

ii) Να αποδείξετε ότι $(x+1)^2=2^{x+1}\Leftrightarrow f(x)=f(1)$, για κάθε $x>-1$

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)^2=2^{x+1}$, $x>-1$ έχει δυο ακριβώς λύσεις , τις $x_1=1$ και $x_2=3$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}} &, \text{αν} \quad x>0 \\ 0 &, \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$

i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f\left(x\right)$ είναι συνεχής στο $x_0=0$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f\left(x\right)$

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$, ισχύει η ισοδυναμία

$$f\left(x\right)=f\left(4\right)\Leftrightarrow x^4=4^x$$

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4=4^x$, $x>0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=4$ **ΘΕΜΑ Επαναληπτικές 2014**

14. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση , η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύουν :

- $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f'(0)<0$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα

ii) Να δείξετε ότι η $f(2e^x)<f\left(1-x^2\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iii) Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $f(3x+1)+1=f\left(x+1\right)+e^x$ β) $f(x^7)-\ln x=f\left(x^6\right)$

15. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση , η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν :

- $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f'(0)=0$

i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x)$

ii) Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $f(2-x)=f\left(3\right)$ στο $\left(-\infty,0\right)$

β) $f(e^{2-x})=f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ στο $\left(1,2\right)$

γ) $f(x)+f(x^3)=f\left(x^2\right)+f\left(x^8\right)$, $x>0$

δ) $f(x)+f(7x)=f\left(3x\right)+f\left(10x\right)$, $x\geq 0$

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in[1,5]$ τέτοιο , ώστε $6f(\xi)=f\left(2\right)+2f\left(3\right)+3f\left(4\right)$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$, $x>0$ και $f\left((0,+\infty)\right)=(0,1)$

i) Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1)>\dfrac{x}{x+1}$, για κάθε $x>0$

ii) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται

iii) Να αποδείξετε ότι η $f(x)>2^{f(x)}-1$, για κάθε $x>0$

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)}{x-1}+\dfrac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\dfrac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0$, όπου $0<\alpha<1$ έχει ακριβώς δυο ρίζες ως προς x , μια στο διάστημα $(0,1)$ και μια στο διάστημα $(1,2)$

ΘΕΜΑ Επαναληπτικές 2018

17. Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, $x>1$ και $f\left((1,+\infty)\right)=(e,+\infty)$

i) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)}{x-1}+\dfrac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}-\dfrac{\eta\mu\alpha-2}{x}=0$, όπου $\alpha>e$ έχει ακριβώς δυο ρίζες ως προς x , μια στο διάστημα $(0,1)$ και μια στο διάστημα $(1,2)$

iii) Να αποδείξετε ότι η $f(x)+1>e+\ln f(x)$, για κάθε $x>1$

ΘΕΜΑ Ομογενείς 2018

18. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(x)e^{x+f(x)}+1=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=\ln 2$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(e^x+1\right)-x$

ii) Μελετήστε την $f(x)$ ως προς τη μονοτονία

iii) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε την $f^{-1}(x)$

iv) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=0$

19. **Α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x - 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα

Β. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

ii) Μελετήστε την $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

iii) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε την $f^{-1}(x)$

iv) Να δείξετε ότι $\dfrac{x}{2} > f(x) > xf'(x)$ για κάθε $x>0$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ με $x>-1$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ ως προς τη μονοτονία

ii) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-1,0)$

ΕΣΠΕΡΙΝΟ 2007

21. Έστω μια συνάρτηση $f(x)$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αν για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $xf(x) = x + 2\eta\mu x$, τότε:

α. Να βρείτε το $f(0)$

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 3$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

22. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη

Δ2. Η εξίσωση $f\left(x^3 - x + 1\right) = f(2)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, 3)

Δ3. Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα [1, 2], [2, 3] και [1, 3] και στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1,2)$, $\xi_2 \in (2,3)$ και $\xi \in (1,3)$ τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση: $2f'(\xi) = f'(\xi_1) + f'(\xi_2)$

ΕΣΠΕΡΙΝΟ 2013

23. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $2f^3(x) + 3f(x) = x + 5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε το $f(0)$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

iii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}

iv) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό κοινό σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

24. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)-xf^2(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων

ii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}

iii) Να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη μονοτονία

iv) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}\left(1-f\left(x^2-9\right)\right)=\dfrac{1}{2}$

v) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(8\left(x^2+1\right)^2\right)-f\left(5\left(x^2+1\right)^3-8\right)=0$

25. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+f(x)-e^x-x+1=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να μελετήσετε την $g(x)=e^x+x-1$ ως προς τη μονοτονία

ii) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f

iii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

iv) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}\left(f^3(x)+f(x)\right)=0$

26. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f'(x)f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$

iii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[1,+\infty)$

iv) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ στο $\mathbb{R}$

27. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{\eta\mu x}=-2 \quad \text{και} \quad f'(x)\neq 0\text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(0)=3$ και $f'(0)=-2$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

iii) Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^2+\lambda\left(f(x)-3\right)^2}{2x^2+\left(f(x)-3\right)^2}=3$

iv) Να αποδείξετε ότι $f\left(e^x\right)<f\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

28. Έστω συνάρτηση $f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x\in\mathbb{R}$

ii) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

iii) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f\left(x^3+\frac{3x^2}{2}-1\right)=1$$

iv) Δείξτε ότι $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x)=0$

v) Βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)$

vi) Βρείτε τα όρια α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-2}{x}$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\eta\mu x+x\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu f(x)\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right)$

ΘΕΜΑ 2003 και 2013 και …

29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\alpha x}{\alpha-x}$ και $g(x)=\ln x+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τους οποίους η C_g διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(e,1)$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{B}(2,f(2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\delta): y=x$

Α. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Β. Για $\alpha=1$ και $\beta=0$

i) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g

ii) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x)=g\big(f(x)\big)$

iii) Αν η συνάρτηση $h(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)$ αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση $h^{-1}(x)$

iv) Αν η συνάρτηση $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη $\varphi(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

v) Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

β) $\lim\limits_{x\to1^-}\left(f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{\left|f^2(x)-3f(x)+7\right|}{\left|3-f^2(x)\right|+6f(x)}\right)$ **ΘΕΜΑ 2017 και ….**

30. Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν :

$f(2)=0$, $f'(2)=1$ και $(x-1)^2 f''(x)+1=0$, για κάθε $x>1$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση f

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $\mathrm{A}(0,-2)$

iv) Ένα κινητό Μ ξεκινάει από το σημείο $\mathrm{B}(2,0)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\geq 2$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του , αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$, για κάθε $t\geq 0$

31. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[-2,2]$, παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-2,2)$ και $\mathrm{B}(2,6)$

i) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $(\delta): y=-x+2$

ii) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε $3f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=4$

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=4-x_0$

iv) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3x}{4}$ με $x>0$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών αν $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}+1\right)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x)+\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{4}$ έχει δυο ακριβώς, θετικές ρίζες

iii) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ οι ρίζες της εξίσωσης $f\left(f(x)+\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{4}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (x_1,1)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$

33. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,6)$ και ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ είναι «1-1»

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι κάθετη στην ευθεία (δ): $y=-\frac{1}{2}x+2020$.

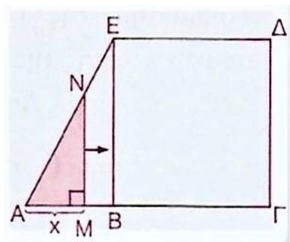
iii) Να αποδείξετε ότι η είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(4-f^{-1}(x-2)\right)<6$

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=5$

vi) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε $\frac{3}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$

34. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB=1$, $A\Gamma=3$ και $\Gamma\Delta=2$



i) Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x=AM$,όταν το Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Ε είναι γνησίως αύξουσα .

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Ε αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη

iv) Να λύσετε την ανίσωση $E\left(\frac{1}{e^x+1}\right)>E\left(\frac{1}{x^2+2}\right)$

35. Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε τρίγωνο ΑΒΓ με βάση $ΒΓ = 12cm$ και ύψος $ΑΔ = 20cm$.

i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΚΛΜΝ είναι

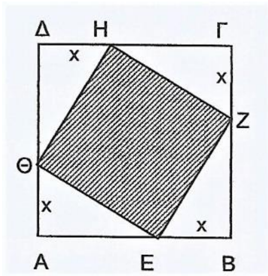
$$\mathrm{E}(x) = \frac{-3x^2 + 60x}{5} \;,\; 0 < x < 20$$

ii) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του ορθογωνίου ΚΛΜΝ γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

iii) Θεωρούμε ένα κινητό Μ που ξεκινά από το σημείο $\mathrm{A}(10,60)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \mathrm{E}(x)$, $x \in (0,10)$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του Μ είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του, αν υποτεθεί ότι $x'(t) < 0$, για κάθε $t \geq 0$;

iv) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{\ln(10 - |x|)}{\mathrm{E}(x) - 60}$

36. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ



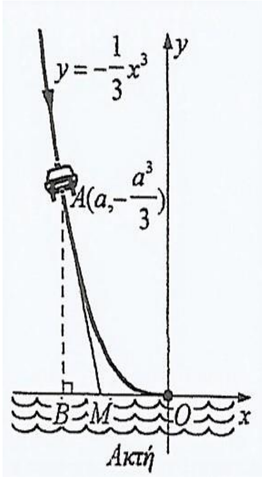
i) Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 4$, $0 \leq x \leq 2$

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

iv) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0} + 1$ cm^2

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, $x \in \mathbb{R}$



Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα)

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\alpha(t)$.

i) Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία το περιπολικό πλησιάζει στην ακτή τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3

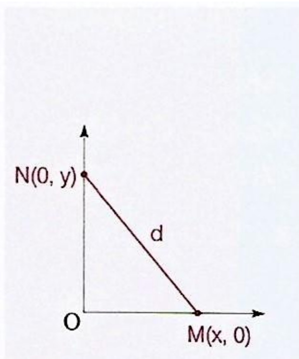
ii) Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία το περιπολικό πλησιάζει στην αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3

iii) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3

iv) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη .

v) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:
$f(\eta\mu x) < f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$

38. Δύο κινητά Μ και Ν κινούνται κατά μήκος των θετικών ημιαξόνων Ox και Oy , ώστε το άθροισμα των αποστάσεών τους από το Ο να είναι 10 .



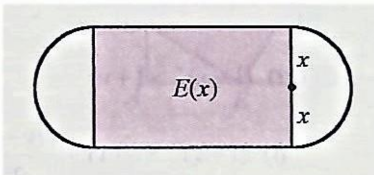
i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση ΜΝ δίνεται από τη συνάρτηση $d(x) = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$ με $0 < x < 10$.

ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η απόσταση d των δυο κινητών γίνεται ελάχιστη .

iii) Όταν το Μ περνάει από το σημείο $A(4,0)$, η τεταγμένη y του Ν ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του Μ τη χρονική στιγμή που περνάει από το Α .

iv) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΝ τη χρονική στιγμή που περνάει από το Α .

39. Ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελεί-ται από ένα ορθογώνιο και δυο ημικύκλια . Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400 m



i) Να βρείτε τις διαστάσεις του στίβου , ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο .

ii) Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν

iii) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή t_0 που η ακτίνα του ημικυκλίου είναι 2 cm και ο ρυθμός μεταβολής της 5 $\frac{cm}{\sec}$

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}

ii) Αν $h(x) = f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ να αποδείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της h

iv) Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_h που είναι παράλληλες στην ευθεία $(\delta): x - 2y + 1 = 0$

v) Να λύσετε την εξίσωση $h(x) = x + h(2x)$

vi) Ένα υλικό κινητό Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο $\mathrm{A}(x_0, h(x_0))$ με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = h(x)$, $x \geq x_0$ με $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$;

41. Έστω $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $2x < f'(x) < e^x$, για κάθε $x > 0$

i) Να δείξετε ότι $x^2 + 1 < f(x) < e^x$, για κάθε $x > 0$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2 - x^2$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$

iv) Να δείξετε ότι $f(2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x) > f(3x)$, για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

42. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f\left(\mathbb{R}\right)=\left(-\infty,0\right)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύουν

- $f'\left(x\right)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(1+2h\right)-f\left(1-h\right)}{h}=3$
- $xf\left(x\right)\geq e^{x}-\ln\left(x^{2}+1\right)-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι $f'\left(1\right)=1$

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

iii) Να δείξετε ότι $f\left(0\right)=1$

iv) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h\left(x\right)=\ln\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

v) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(\ln x\right)=f\left(x-1+\dfrac{\left(x-1\right)^{2}}{2}\right)$, $x>0$

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln x+\dfrac{\beta}{x}+\alpha$

A. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτης
$f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 1 με τιμή 2
Στη συνέχεια να βρείτε το είδος του ακροτάτου

B. Για $\alpha=\beta=1$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς την μονοτονία

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)+f\left(x^{2020}\right)=4$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f\left(x^{2}+1\right)-1\right)=2$

44. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση , η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύουν

- $\left[\left(f'(x)\right)^2\right]' \neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-2}{h}=2$
- $xf(x)+2e^x \leq \eta\mu x+2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι $f(1)=2$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=1$

iii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

iv) Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

v) Να δείξετε ότι $f(2x)<f(x)+xf'(x)$, για κάθε $x>0$

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, $x>-1$ όπου $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$

A. Αν ισχύει $f(x)\geq 1$, για κάθε $x>-1$ να αποδείξετε ότι $\alpha=e$

B. Για $\alpha=e$

i) Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

iii) Να λυθεί η εξίσωση $e^{x^2+1}=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{3x+5}\right)+e^{3x+5}$

iv) Αν $\beta,\gamma\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ να δείξετε ότι η εξίσωση

$\dfrac{f(\beta)-1}{x-1}+\dfrac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha e^{x-1}+\beta\ln x-1$ της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο $\mathrm{A}(1,0)$

i) Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-1$

ii) Να δείξετε ότι η $f\,'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

iii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f και στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$

iv) Να δείξετε ότι $f\,'(x)>\dfrac{f(x)}{x-1}$, για κάθε $x>1$

47. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $x\neq 1$

i) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f(g(x))$

ii) Αν $h(x)=f(g(x))=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να ορίσετε την h^{-1}

iii) Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση $\varphi(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

iv) Ένα κινητό Μ κινείται στη γραφική παράσταση της f και καθώς περνάει από το σημείο $\mathrm{A}(1,0)$ η τετμημένη του x ελαττώνεται κατά 2 μονάδες το δευτερόλεπτο .

α) Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται το κινητό Μ από την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_0 που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,0)$

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta=\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}x$ τη χρονική στιγμή που το κινητό διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,0)$

48. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$

i) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h(x)=g(f(x))$

ii) Αν $h(x)=g(f(x))=\dfrac{1}{e^x}=e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να ορίσετε την h^{-1}

iii) Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=-\ln x$, $x>0$, να μελετήσετε τη συνάρτηση $\varphi(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $h(x)+h^{-1}(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0\in(1,2)$

v) Ένα κινητό Μ κινείται στη γραφική παράσταση της f και καθώς περνάει από το σημείο $\mathrm{A}(0,1)$ η τετμημένη του x αυξάνει με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο.
Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται το κινητό Μ από την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_0 που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,1)$

49. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

i) Δείξτε ότι η f είναι 1 – 1 .
ii) Να ορίσετε την αντίστροφη της f .
iii) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

50. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} e^x & , \ x\leq 0 \\ 1+\sqrt{x} & , \ x>0 \end{cases}$

i) Δείξτε ότι η f είναι 1 – 1 .
ii) Να ορίσετε την αντίστροφη της f .

51. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} & , \quad x<0 \\ \alpha+\ln(x+1) & , \quad x\geq 0 \end{cases}$

Α) Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Β) Για $\alpha=2$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

ii) Δείξτε ότι η f είναι 1 – 1 και αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφη f^{-1} της f .

52. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f\left(g(x)\right)=\dfrac{4x^2-4x+5}{2x-1}$, $x\neq\dfrac{1}{2}$ και $g(x)=2x-1$, $x\in\mathbb{R}$

i) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f(x)$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

iii) Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτομένες είναι κάθετες στην ευθεία $(\delta): y=x$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.

iv) Έστω $\mathrm{M}(x,y)$, $x<0$ ένα σημείο που κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του x μειώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο . Τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-4,-5)$ να βρείτε

α) το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του Μ

β) το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta=\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}x$