γ. Αρκεί να δείξουμε ότι

$\ldots \Leftrightarrow 2[F(3)-F(1)] > F(4)-F(0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2g(3) > g(4) \Leftrightarrow 2g(3) > g(4)+g(2)$, $[\,g(2)=0\,]$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \dfrac{g(3)-g(2)}{3-2} > \dfrac{g(4)-g(3)}{4-3}$. Για τη g ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα $[2,3]$, $[3,4]$.

δ. Έχουμε $\ldots \Leftrightarrow F(x+e^{x-1}) - F\big(4-(x+e^{x-1})\big) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x+e^{x-1}) > g(2)$, (1) .

Είναι $g'(x) = f(x)+f(4-x)$, $x\in\mathbb{R}$ με $g'(2)=0$.

Είναι $g'\uparrow(-\infty,2]$ και $g'\downarrow[2,+\infty)$. Βρίσκουμε $g'(x)<0$, για $x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ και η g είναι συνεχής στο 2 , οπότε $g\downarrow\mathbb{R}$.

Άρα η (1) $\overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} x+e^{x-1} < 2 \Leftrightarrow x+e^{x-1}-2<0$, (2) .

Έστω $h(x) = x+e^{x-1}-2$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $h(1)=0$ και $h'(x)=1+e^{x-1}>0$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε $h\uparrow\mathbb{R}$.

Επομένως η (2) $\Leftrightarrow h(x)<h(1) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} x<1$.

Θέμα 98

α. Για $x=0$ από τη δοσμένη σχέση προκύπτει $e^{f(0)}+f(0)-1=0$, (1) . Αν $g(x)=e^x+x-1$, $x\in\mathbb{R}$, τότε $g'(x)=e^x+1>0$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε $g\uparrow\mathbb{R}$, άρα και 1 – 1 , ενώ $g(0)=0$.

Βρίσκουμε ότι η g έχει μοναδική ρίζα το 0 .

Οπότε (1) $\Leftrightarrow g\big(f(0)\big)=g(0) \overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} f(0)=0$.

Έχουμε $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{f(x)}}>0$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε $f\uparrow\mathbb{R}$.

Για $x\in\mathbb{R}$ και $y\in f(\mathbb{R})$ είναι $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται

$e^y+y=f^{-1}(y)+1 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^y+y-1$.

Άρα $f^{-1}(x)=e^x+x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

β. ► Βρίσκουμε $f''(x) = -\dfrac{f'(x)e^{f(x)}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2}<0$, οπότε η f είναι κοίλη. Αρκεί να δείξουμε για $x>0$, ότι

$\dfrac{x}{2} > f(x) > xf'(x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} > \dfrac{f(x)}{x} > f'(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x) < \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} < \dfrac{1}{2}$, (1) .

Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0,x]$, $x>0$.

γ. Είναι $0\le f(x)\le \dfrac{x}{2}$, $x\ge 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x=0$, οπότε $\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 \dfrac{x}{2}dx = \ldots = \dfrac{1}{4}$.

δ. Επειδή $f\uparrow$ $A=\mathbb{R}$, συνεχής και $f(A)=\mathbb{R}$ θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Θέτουμε $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x} = \lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y+f^{-1}(y)}{y-f^{-1}(y)} =$

$=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2x-1}{1-e^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \ldots \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \ldots = -1$.

Θέμα 99

α. Η f είναι συνεχής στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, πρέπει να είναι συνεχής και στο 1 . Είναι $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\ldots=0$, αφού

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \ldots = 1$ και $f(1)=\alpha$, οπότε $\alpha=0$.

Άρα $\alpha=0$.

β. Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \ldots = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)\ln x} =$

$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \ldots \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \ldots = -\dfrac{1}{2}$. Βρίσκουμε $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

γ. Είναι: • $F'(x)=f(x)$

• $F''(x)=f'(x)=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)\ln x}$, $0<x\ne1$,

όπου $(x-1)\ln x>0$, για $0<x\ne1$.

Θέτουμε $g(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x$, $x>0$.

Είναι $g'(x)=\ldots=\dfrac{1-x}{x^2}$, $x>0$ οπότε παρουσιάζει μέγιστο μόνο στο 1 το $g(1)=0$.

Άρα $g(x)<0$, $0<x\ne1$.

Βρίσκουμε $F''(x)<0$, $0<x\ne1$ και αφού η F είναι συνεχής στο 1 , έχουμε ότι $F'\downarrow(0,+\infty)$.

Προκύπτει ότι η F είναι κοίλη και παρουσιάζει μέγιστο στο 1 , οπότε $F(x)\le F(1)=0$, $x>0$.

δ. Για $x\in\mathbb{R}$ είναι

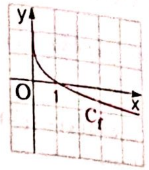
$\ldots\Leftrightarrow F(e^x+2)-F(e^x+1)=F(x^2+3)-F(x^2+2)$, (1) .

Θέτουμε $G(x)=F(x+1)-F(x)$, $x\ge0$ και αποδεικνύουμε ότι η G είναι 1 – 1.

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow G(e^x+1)=G(x^2+2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow \ln(x^2+1)-x=0$, (2) .

Θέτουμε $\varphi(x)=\ln(x^2+1)-x$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $\varphi(0)=0$ και



$\varphi'(x)=\ldots=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}<0$, $x\ne1$,

αλλά η φ είναι συνεχής στο 1 , οπότε είναι $\varphi\downarrow\mathbb{R}$, άρα και 1 – 1.

Άρα η (2) $\Leftrightarrow \varphi(x)=\varphi(0)\Leftrightarrow x=0$.

Θέμα 100

α. • Είναι $f'(x)=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}<0$, για κάθε $x\ne1$ και η f είναι συνεχής στο 1 , άρα $f\downarrow\mathbb{R}$.

Είναι: • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}-1-\dfrac{1}{x}\right)=\ldots=-\infty$

και προκύπτει $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

• $\ldots\Leftrightarrow \dfrac{(x^2+1)^2+1}{(x+3)^2+1}=e^{x^2-x-2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow \ln\left[(x^2+1)^2+1\right]-(x^2+1)-1=$

$=\ln\left[(x+3)^2+1\right]-(x+3)-1$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$

β. Είναι $\ldots\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}$ συν$x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}-1>0$, $x<0$.

Έστω $h(x)=$ συν$x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}-1$, $x\le0$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $h(x)>0$, $x<0$.

Βρίσκουμε $h^{(3)}(x)=$ ημ$x-1<0$, για κάθε $x\le0$ με $x\ne\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}^- -\{0\}$ και επειδή η h'' είναι συνεχής προκύπτει $h''\downarrow(-\infty,0]$. Στη συνέχεια βρίσκουμε $h'\uparrow(-\infty,0]$ και $h\downarrow(-\infty,0]$.

Άρα για $x<0\overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow}h(x)>0$.

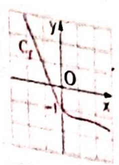
γ. Είναι $f''(x)=-2\dfrac{(x-1)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.

Βρίσκουμε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο 1 και στο –1 .

Οι εφαπτομένες έχουν εξισώσεις $y=-2x-2+\ln2$ και $y=\ln2-2$, και το σημείο τομής είναι $(0,\ln2-2)\in y'y$.

δ. $\ldots\Leftrightarrow\dfrac{F(x^3)-F(x^2)}{x^3-x^2}<\dfrac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x}$ και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την F στα $[x,x^2]$, $[x^2,x^3]$, $x>1$.

Είναι $F'\downarrow\mathbb{R}$.



Θέμα 101

α. • $f'(x)=2$συν$x-1$, $x\in[0,\pi]$.

Στο διπλανό πίνακα φαίνεται η μονοτονία και τα ακρότατα της f .

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$	$\searrow$	$-\pi$
	τ.ε.		μεγ.		ελ.

• $f''(x)=-2$ημ$x<0$, για κάθε $x\in(0,\pi)$.

Βρίσκουμε ότι η f είναι κοίλη.

β. Η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0,f(x_0))$ είναι $\varepsilon: y=(2$συν$x_0-1)x+2$ημx_0-2x_0συνx_0 και διέρχεται από το $A\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ αν και μόνο αν

$\ldots\Leftrightarrow 2$ημ$x_0+(\pi-2x_0)$συν$x_0-\pi=0$, (1) .

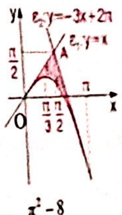
Έστω $g(x)=2$ημ$x+(\pi-2x)$συν$x-\pi$, $x\in[0,\pi]$.

Είναι $g(0)=g(\pi)=0$ και από το διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η (1) $\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=\pi$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
g'	0	$-$	0	$+$	0
g	0	$\searrow$	$2-\pi$	$\nearrow$	0
	μεγ.		ελ.		μεγ.

Βρίσκουμε $\varepsilon_1: y=x$ και $\varepsilon_2: y=-3x+2\pi$.

γ. $E=E_1+E_2=$



$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-f(x))dx+$

$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-3x+2\pi-f(x))dx$

$=\ldots=\left(\dfrac{\pi^2}{4}-2\right)+\left(\dfrac{\pi^2}{4}-2\right)=\dfrac{\pi^2}{2}-4=\dfrac{\pi^2-8}{2}$

δ. $... = \lim_{x\to 0}\left[(6\frac{ημ3x}{3x} - 3)x\ln x\right] = ... = -3\cdot 0 = 0$

Θέμα 102

α. • Η f είναι συνεχής στα $[-1, 0)$, $(0, 1]$, για κάθε $α \in \mathbb{R}$ και επιπλέον βρίσκουμε ότι είναι συνεχής και στο 0 , για $α = -1$. Οπότε η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ για $α = -1$.

• Για $α = -1$, η f είναι παραγωγίσιμη στα $(-1, 0)$, $(0, 1)$ και επιπλέον βρίσκουμε $f'(0) = 0$.

Άρα για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-1, 1]$, για $α = -1$.

β. Είναι: $f'(x) = \begin{cases} 2xe^{x^2} & , x < 0 \\ (-x^2 + 2x)e^{-x} & , x \geq 0 \end{cases}$.

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται η μονοτονία, τα ακρότατα και οι οριακές τιμές της f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		−	0	+	0	−	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0
			ελ.		τ.μ.		

Βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών είναι το $f(A) = [0, +\infty)$.

γ. Αποδεικνύουμε ότι $2e^{2-x}$, $6 - 2x \in [2, +\infty)$, για κάθε $x \in [0, 2]$ και η f είναι 1–1 στο $[2, +\infty)$.

Οπότε η εξίσωση γίνεται $... \Leftrightarrow e^{2-x} + x - 3 = 0$, (1) .

Έστω $g(x) = e^{2-x} + x - 3$, $x \in [0, 2]$.

Αποδεικνύουμε ότι η g είναι 1–1 στο $[0, 2]$.

Άρα η (1) $\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x = 2$.

δ. Αποδεικνύουμε ότι $\frac{4}{x}, \frac{8}{x^2} \in (0, 2)$, για κάθε $x > 2$. Επειδή f↑ $[0, 2]$ έχουμε

$... \Leftrightarrow \frac{4}{x} > \frac{8}{x^2} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x > 2$, που ισχύει.

ε. • Αποδεικνύουμε ότι $f(x) > 0$ και $f(3x) - f(2x) > 0$, κοντά στο 0^+ , οπότε $f(x) + f(3x) - f(2x) > 0$, κοντά στο 0^+ .

• Επιπλέον $\lim_{x\to 0^+}\left(f(x) + \left(f(3x) - f(2x)\right)\right) = 0$.

Βρίσκουμε ότι το όριο είναι $-\infty$.

Θέμα 103

α. • Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0 .

• Είναι $f'(x) = \frac{xσυνx - ημx}{x^2}$, $x \in (0, π)$.

Έστω $g(x) = xσυνx - ημx$, $x \in [0, π)$.

Βρίσκουμε $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, π)$.

Οπότε $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, π)$.

β. Για κάθε $x \in (\frac{π}{2}, π)$ έχουμε

$... \Leftrightarrow f(x) < f(\frac{π}{2}) \overset{f↓}{\Leftrightarrow} x > \frac{π}{2}$, που ισχύει.

γ. Από το ερώτημα β. έχουμε

$πημx - 2x < 0$, κοντά στο $\frac{π}{2}^+$.

Βρίσκουμε ότι το όριο είναι $-\infty$.

δ. Για κάθε $x \in \left[\frac{π}{3}, \frac{π}{2}\right]$ έχουμε

$\frac{π}{3} \leq x \leq \frac{π}{2} \overset{f↓}{\Leftrightarrow} f(\frac{π}{2}) \leq f(x) \leq f(\frac{π}{3})$ και τα ίσον ισχύουν, μόνο για $x = \frac{π}{2}$ και $x = \frac{π}{3}$.

Θέμα 104

α. Έστω $(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f .

Η εφαπτομένη της C_f στο x_0 είναι

$ε: y - συνx_0 = -ημx_0(x - x_0)$ και διέρχεται από το $M(0, \frac{π}{2})$ όταν $\frac{π}{2} - συνx_0 = -ημx_0(0 - x_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 2x_0ημx_0 + 2συνx_0 - π = 0$, (1) .

Για την $g(x) = 2xημx + 2συνx - π$, $x \in \left[-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right]$,

βρίσκουμε $g\left(-\frac{π}{2}\right) = g\left(\frac{π}{2}\right) = 0$

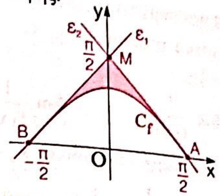
και από το διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η g έχει ρίζες μόνο τις $-\frac{π}{2}$ και $\frac{π}{2}$.

x	$-\frac{π}{2}$		0		$\frac{π}{2}$
g'	0	−	0	+	0
g	0	↘		↗	0

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow x_0 = -\frac{π}{2}$ ή $x_0 = \frac{π}{2}$.

Βρίσκουμε τις $ε_1: y = x + \frac{π}{2}$, $ε_2: y = -x + \frac{π}{2}$.

β. Είναι $f''(x) = -συνx < 0$, $x \in (-\frac{π}{2}, \frac{π}{2})$, οπότε η f είναι κοίλη, άρα η C_f βρίσκεται κάτω από τις $ε_1$, $ε_2$, εκτός των σημείων επαφής.



Είναι

$E = (MAB) - \int_{-\frac{π}{2}}^{\frac{π}{2}} συνx\,dx$.

Βρίσκουμε $E = \frac{π^2 - 8}{4}$.

γ. Η f είναι κοίλη, οπότε η C_f είναι κάτω από την εφαπτομένη της στο $x_0 = \frac{π}{2}$, άρα $f(x) \leq -x + \frac{π}{2} \Leftrightarrow$

$... \Leftrightarrow 2f(x) + 2x - π \leq 0$, για κάθε $x \in [-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}]$,

οπότε $2f(x) + 2x - π < 0$ κοντά στο $\frac{π}{2}^-$. Βρίσκουμε ότι το όριο είναι $-\infty$.

δ. Για κάθε $x \in [\frac{π}{3}, \frac{π}{2}]$, έχουμε

$f(x) \leq -x + \frac{π}{2} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \frac{συνx}{x} \leq -1 + \frac{π}{2x}$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = \frac{π}{2}$.

Οπότε $\int_{\frac{π}{3}}^{\frac{π}{2}} \frac{συνx}{x}dx < \int_{\frac{π}{3}}^{\frac{π}{2}} (-1 + \frac{π}{2x})dx \Leftrightarrow ...$.

Θέμα 105

α. • $\int_0^1 xf''(x)dx = 1 \Leftrightarrow [xf'(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)dx = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(1) - [f(1) - f(0)] = 1 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f(1) = -1$.

• Επειδή η f είναι συνεχής και δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών στο $[0, 2]$, θα ισχύει $f(2) = f(0) \Leftrightarrow f(2) = 0$.

• Για το ολοκλήρωμα $\int_{\sqrt{3}}^2 xf'(x^2)dx$, θέτουμε $u = x^2$, οπότε $du = 2x\,dx$ και για $x = \sqrt{3}$, $x = 2$ βρίσκουμε $u = 3$, $u = 4$ αντίστοιχα.

Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει

$... \Leftrightarrow \int_3^4 f'(u)du = 1 \Leftrightarrow f(4) - f(3) = 1$, (1) .

• Από τη $C_{f'}$ προκύπτει ότι $f'(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$, $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [1, 4]$.

Έχουμε $E = 4 \Leftrightarrow -\int_0^1 f'(x)dx + \int_1^4 f'(x)dx = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow -f(1) + f(0) + f(4) - f(1) = 4$

$\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f(4) = 2$.

• Από την (1) $\Leftrightarrow f(3) = 1$.

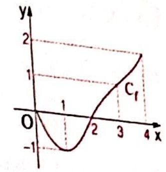
β. • f↓ $[0, 1]$, f↑ $[1, 4]$.

• Η f παρουσιάζει στο 0 τοπικό μέγιστο το $f(0) = 0$, στο 1 ελάχιστο το $f(1) = -1$ και στο 4 μέγιστο το $f(4) = 2$.

• Η f είναι κυρτή στο $[0, 2]$, κοίλη στο $[2, 3]$ και κυρτή στο $[3, 4]$.

• Η f παρουσιάζει καμπή στα σημεία 2 και 3 . Τα σημεία καμπής είναι τα $(2, 0)$ και $(3, 1)$.

γ. Η C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



δ. Είναι $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-2)}{f(x) - 2x + 4} =$

$= \lim_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{f(x) - (2x - 4)}\cdot\ln(x-2)\right] = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$,

αφού η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 2$ είναι η $y = 2x - 4$ και η f είναι κοίλη στο $[2, 3]$.

Θέμα 106

α. Είναι

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1 - συνx}{x} = -\lim_{x\to 0}\frac{συνx - 1}{x} = 0 = f(0)$,

οπότε η f είναι συνεχής στο 0 .

Έχουμε $f'(x) = \frac{xημx - 1 + συνx}{x^2}$, $(-\frac{π}{2}, 0) \cup (0, \frac{π}{2})$.

Έστω $g(x) = xημx - 1 + συνx$, $x \in (-\frac{π}{2}, \frac{π}{2})$.

Οπότε $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, $x \in (-\frac{π}{2}, 0) \cup (0, \frac{π}{2})$.

Βρίσκουμε το διπλανό πίνακα.

x	$-\frac{π}{2}$		0		$\frac{π}{2}$
g'		−	0	+	
g		+ ↘	0	↗ +	

Οπότε $g(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, για κάθε

$x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 0, έχουμε $f \uparrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

β. Είναι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \ldots = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \ldots = \frac{1}{2}$.

Βρίσκουμε $\varepsilon : y = \frac{1}{2}x$.

γ. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) < \frac{1}{2}x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x - 2 > 0$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Έστω $h(x) = x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x - 2$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Βρίσκουμε $h \uparrow [0, \frac{\pi}{2})$.

δ. Έχουμε $f(x) \le \frac{1}{2}x \Rightarrow f(x)\ln(x+1) \le \frac{1}{2}x\ln(x+1)$, για κάθε $x \in [0, 1]$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$.

Οπότε $\int_0^1 f(x)\ln(x+1)dx < \int_0^1 \frac{1}{2}x\ln(x+1)dx =$

$$= \ldots = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^2-1+1}{x+1}dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \ldots = \frac{1}{8}$$

Θέμα 107

α. • Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 - e^{-x} > 0$, για κάθε $x > 0$,

αφού: • $\frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$.

• $x > 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0$.

Οπότε $f \uparrow (0, +\infty)$, άρα η f είναι 1–1, επομένως η f αντιστρέφεται.

• $D_{f^{-1}} = f\big((0, +\infty)\big) = \ldots = \mathbb{R}$.

β. Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $\ldots \Leftrightarrow f\big(f^{-1}(x)\big) = x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

γ. Βρίσκουμε $f\big((0, 1)\big) = (-\infty, 1 + \frac{1}{e})$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, ώστε $f(x_0) = 0$.

Βρίσκουμε το διπλανό πίνακα προσήμων της f, οπότε:

x	0		x_0		1
f		−	0	+	

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 < 1$, ώστε να μην υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)}$ γιατί για κάθε $x_1 \ne x_0$ το

$\lim\limits_{x \to x_1} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_1)}$, αφού $f(x_1) \ne 0$.

δ. Για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ είναι $\ldots \Leftrightarrow f(x) < f(\varepsilon\varphi x)$

$\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x - x > 0$, (1).

Έστω $g(x) = \varepsilon\varphi x - x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Βρίσκουμε $g \uparrow [0, \frac{\pi}{2})$.

Άρα η $(1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x > 0$, που ισχύει.

Θέμα 108

α. Η f ορισμένη στο σύνολο $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

► Είναι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \ldots = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\varepsilon\varphi x - x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \ldots = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{2x} = \ldots = 0$.

Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 0$, άρα το 0 είναι κρίσιμο σημείο της f.

► Είναι: • $f'(x) = \ldots = \frac{x - \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x}{x^2\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $0 \ne |x| < \frac{\pi}{2}$.

Έστω $g(x) = x - \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $0 \ne |x| < \frac{\pi}{2}$.

Είναι $g(0) = 0$ και βρίσκουμε $g \uparrow \mathbb{R}$.

Οπότε για $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ με $x < 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) < g(0) = 0$

και για $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ με $x > 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) > 0$.

Άρα $f'(x) \ne 0$, για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$.

Άρα η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο το 0.

β. Στο διπλανό πίνακα φαίνονται η μονοτονία και τα ακρότατα της f.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f′		−	0	+	
f		↘	1	↗	
			ελ.		

γ. Για $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

έχουμε: $f(-x) > \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow f(-x) > f(-\frac{\pi}{4})$

$\overset{f\downarrow(-\frac{\pi}{2}, 0)}{\Longleftrightarrow} -x < -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

δ. Έχουμε $f(x) \ge 1 \overset{\cdot \ln(x+1)}{\Rightarrow} f(x)\ln(x+1) \ge \ln(x+1)$, για κάθε $x \in [0, 1]$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$.

Οπότε $\int_0^1 f(x)\ln(x+1)dx > \int_0^1 \ln(x+1)dx$.

Είναι $\int_0^1 \ln(x+1)dx = \int_0^1 (x+1)'\ln(x+1)dx = \ldots$.

Θέμα 109

α. Είναι: • $f'(x) = \ldots = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε $f \uparrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα η f είναι 1–1, επομένως αντιστρέφεται.

• Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το

$$f\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = \ldots = \mathbb{R}.$$

Οπότε η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

β. Είναι: • $f''(x) = \ldots = \eta\mu x \cdot \frac{2 - \sigma\upsilon\nu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

• $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 0$.

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f″		−	0	+	
f		⌒	0	⌣	
			σ.κ.		

γ. Είναι $-\frac{\pi}{2} < f^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$, $x \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Οπότε $2f^{-1}(x) > x \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f(y) < 2y$, (1).

Βρίσκουμε $f(x) < 2x$, για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, οπότε

η $(1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y < 0$ και $y > -\frac{\pi}{2}$, που ισχύει

$\Leftrightarrow f^{-1}(x) < 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow x < 0$.

δ. 0

Θέμα 110

α. Για $x \ne 0$, $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ και η f είναι συνεχής,

οπότε $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \ldots = 1$.

β. Είναι $f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$, $x \ne 0$,

όπου $\varphi(x) = e^x - 1 - xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Από το διπλανό πίνακα βρίσκουμε $\varphi(x) < 0$, $x \ne 0$ οπότε $f'(x) < 0$, $x \ne 0$ και η f είναι συνεχής στο 0, άρα $f \downarrow \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ′		+	0	−	
φ		↗	0	↘	
			μεγ.		

Επομένως η f είναι 1 – 1, άρα αντιστρέφεται. Βρίσκουμε $f(A) = (0, +\infty)$.

γ. Είναι $\ldots \Leftrightarrow \alpha\ln\alpha = \beta\ln\beta$. Για την $h(x) = x\ln x$, $x > 0$ από το Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$ προκύπτει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \xi = e^{-1}$, οπότε $\alpha < e^{-1} < \beta$. Τότε $\alpha < e^{-1} \Rightarrow \alpha < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha\ln\alpha < 0 \Rightarrow \beta\ln\beta < 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \beta < 1$.

Άρα $0 < \alpha < e^{-1} < \beta$.

► Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την

$F(x) = 1 + \ln x - (x - \alpha)\int_\beta^\alpha \frac{f(x)}{\beta - \alpha}dx$ στο $[\alpha, \beta]$.

Είναι: • $F(\alpha) = 1 + \ln\alpha < 0$, αφού $\alpha < e^{-1} \Rightarrow \ln\alpha < -1 \Rightarrow 1 + \ln\alpha < 0$

• $F(\beta) = 1 + \ln\beta - (\beta - \alpha)\int_\beta^\alpha \frac{f(x)}{\beta - \alpha}dx =$

$= 1 + \ln\beta - \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha}\int_\beta^\alpha f(x)dx = 1 + \ln\beta + \int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$

αφού $\beta > e^{-1} \Rightarrow \ln\beta > -1 \Rightarrow 1 + \ln\beta > 0$ και για

$x\in[\alpha,\beta]$ είναι $x>0$ και $e^x>1\Leftrightarrow e^x-1>0$, άρα

$f(x)>0\Rightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$

► Είναι $F'(x)=\dfrac{1}{x}-\int_\beta^\alpha\dfrac{f(x)}{\beta-\alpha}dx=$

$=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$, άρα $x\in(\alpha,\beta)$, άρα

$F\uparrow(\alpha,\beta)$.

δ. Έστω G μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.

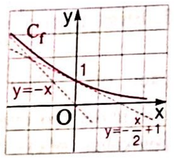
Οπότε $\int_1^{g(1)}f(x)dx>0\Leftrightarrow G(g(1))-G(1)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow G(g(1))>G(1)$, (1). Επειδή $G'(x)=f(x)>0$,

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε $G\uparrow\mathbb{R}$, οπότε

η $(1)\Leftrightarrow g(1)>1\Leftrightarrow g(1)-1>0$.

Είναι $g(x)=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow xg(x)-1=0$, $x\in(0,1)$.



Για την $H(x)=xg(x)-1$, $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[0,1]$, οπότε η εξίσωση $H(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

Θέμα 111

α. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $\ldots\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=2x$

$\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=(x^2)'\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+c$.

Βρίσκουμε $c=1$, οπότε $f^2(x)=x^2+1\Leftrightarrow$

$|f(x)|=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη και $\sqrt{x^2+1}\neq0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε από την (1) είναι $f(x)\neq0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον $f(0)=1>0$.

β. • Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\ldots=0$

• Ισχύει $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Είναι: • $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$ και βρίσκουμε

$f\downarrow(-\infty,0]$, $f\uparrow[0,+\infty)$.

• $f''(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

οπότε η f είναι κυρτή.

δ. Για κάθε $x\in[1,2]$, είναι $\ln x\geq0$ και από το **β.** ερώτημα ισχύει $f(x)>x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $f(x)\ln x\geq x\ln x$, για κάθε $x\in[1,2]$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=1$.

Θέμα 112

α. Έστω $g(x)=(x^2+1)f(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι: • $g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)-1$, $x\in\mathbb{R}$.

• $g''(x)=\ldots=0$.

Οπότε η g' είναι σταθερή.

Άρα $g'(x)=c_1$ και βρίσκουμε $c_1=0$.

Οπότε $g'(x)=0$, άρα η g είναι σταθερή.

Άρα $g(x)=c_2$ και βρίσκουμε $c_2=0$.

β. Είναι: • $f'(x)=\ldots=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$

• $f''(x)=\ldots=\dfrac{2x(x-\sqrt3)(x+\sqrt3)}{(x^2+1)^3}$, $x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\sqrt3$		0		$\sqrt3$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\frown$	σ.κ.	$\smile$	σ.κ.	$\frown$	σ.κ.	$\smile$	

Οπότε η C_f έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\sqrt3,f(-\sqrt3)\right)$, $O\left(0,f(0)\right)$ και $B\left(\sqrt3,f(\sqrt3)\right)$.

Τα A, B είναι συμμετρικά ως προς το O, οπότε τα A, B, O είναι συνευθειακά.

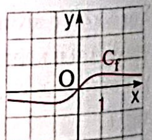
γ. $E(\Omega)=\int_0^1f(x)dx=\ldots=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{2x}{x^2+1}dx=\ldots=\dfrac{1}{2}\ln2$

δ. ► Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε

$|f(x)|\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\dfrac{|x|}{x^2+1}\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x^2+1\geq2|x|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow(|x|-1)^2\geq0$.

► • Αν $\alpha=\beta$, τότε ισχύει ως ισότητα.



• Αρκεί να δείξουμε για $\alpha\neq\beta$ και έστω $\alpha<\beta$ ότι

$\ldots\Leftrightarrow\left|\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|\leq\dfrac{1}{2}$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την F στο $[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$.

ε. Από το προηγούμενο ερώτημα, για $\alpha=x\in\mathbb{R}$ και $\beta=\sqrt{x^2+1}$, έχουμε

$|F(\sqrt{x^2+1})-F(x)|\leq|\sqrt{x^2+1}-x|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-|\sqrt{x^2+1}-x|\leq F(\sqrt{x^2+1})-F(x)\leq|\sqrt{x^2+1}-x|$

Βρίσκουμε

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-|\sqrt{x^2+1}-x|)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}|\sqrt{x^2+1}-x|$ και

σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(F(\sqrt{x^2+1})-F(x)\right)=0$.

Θέμα 113

α. Είναι $\ldots\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=-f'(x)f(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'=\left(-\dfrac{f^2(x)}{2}\right)'\Leftrightarrow\ldots$.

Βρίσκουμε $f^2(x)+2xf(x)+x^2=x^2+1$.

$\Leftrightarrow\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1$.

Θέτουμε $\varphi(x)=f(x)+x$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$\ldots|g(x)|=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Βρίσκουμε $g(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$ και προκύπτει

$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=\ldots=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=-f'(x)\sqrt{x^2+1}$, (1).

β. Είναι $g(x)=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=1$. Η g είναι συνεχής και $g(x)\leq0$, $x\in[0,1]$.

Άρα $E(\Omega)=-\int_0^1g(x)dx=\int_0^1\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}dx=$

$=\int_0^1\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx\overset{(1)}{=}\int_0^1\left(-\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)dx$

$=\ldots=1-\sqrt2+\ln(\sqrt2+1)$.

γ. Είναι $f''(x)=\ldots=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}>0$, $x\in\mathbb{R}$,

οπότε η f είναι κυρτή.

δ. ► Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,2x]$, $x>0$ και μονοτονία της f'.

► Αποδεικνύουμε ότι η h είναι συνεχής στο 0.

Είναι $h'(x)=\ldots=$

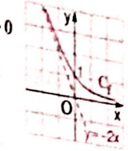
$=\dfrac{x\left(f'(2x)-f'(x)\right)+\left(f(x)-f(2x)\right)+xf'(2x)}{x^2}>0$,

για κάθε $x>0$, αφού για $x>0$ είναι:

• $2x>x\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}\ldots\Rightarrow x\left(f'(2x)-f'(x)\right)>0$

• $f(2x)-f(x)<xf'(2x)$.

Άρα $h\uparrow[0,+\infty)$.



Θέμα 114

α. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xf\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)}{y}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\neq0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$ και $f(x)=xg(x)$.

• Αφού η f είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, έχουμε $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\ldots=0$

• Είναι $f'(0)=\ldots=\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$.

β. Επειδή η f'' είναι συνεχής και ισχύει $f''(x)\neq0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f'' θα διατηρεί πρόσημο.

• Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,1]$ και βρίσκουμε $\xi_1\in(0,1)$, ώστε $f'(\xi_1)=f(1)>1$.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[0,\xi_1]$ και βρίσκουμε $\xi_2\in(0,\xi_1)$, ώστε $f''(\xi_2)=\dfrac{f'(\xi_1)-1}{\xi_1}>0$.

γ. Για $x>-1$, έχουμε

$f(x)=\ln(x+1)\Leftrightarrow f(x)-\ln(x+1)=0$, (1).

Έστω $h(x)=f(x)-\ln(x+1)$, $x>-1$, οπότε

η $(1)\Leftrightarrow h(x)=0$, (2).

Είναι: • $h'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{x+1}$, $x>-1$ και

$h'(0)=f'(0)-1=0$.

• $h''(x)=f''(x)+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$, για κάθε $x>-1$,

άρα $h'\uparrow(-1,+\infty)$.

x	-1		0		$+\infty$
h''			$+$		
h'		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	
			ελ.		

Από το διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η h παρουσιάζει ελάχιστο, μόνο στο 0 το $h(0)=0$.

Οπότε η $(2)\Leftrightarrow x=0$. Άρα $x=0$.

δ. i. Είναι $\lim_{x\to0} f(x)\ln x = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)}{x} x\ln x\right) \overset{\alpha}{=} 1\cdot 0 = 0$,

αφού: $\lim_{x\to0} x\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \dots = 0$.

ii. Είναι $\lim_{x\to0}\frac{ημx}{xf(x)-x^2} = \lim_{x\to0}\frac{ημx}{x}\cdot\frac{1}{f(x)-x} =$

$=1\cdot(+\infty)=+\infty$, αφού η f είναι κυρτή και η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ είναι η ευθεία $y=x$.

Θέμα 115

α. Θέτουμε $g(x)=f(x)+x$, οπότε

$\dots\Leftrightarrow \left(e^{g(x)}\right)' = e^x - 1$.

Βρίσκουμε

$e^{g(x)} = e^x - x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x)=\ln(e^x-x)-x$, $x\in\mathbb{R}$.

β. Βρίσκουμε f ↓ $(-\infty,1]$, f ↑ $[1,+\infty)$ και

$f(\mathbb{R}) = [\ln(e-1)-1,+\infty)$

γ. Είναι $f''(x)=\frac{h(x)}{(e^x-x)^2}$, όπου

$h(x)=(2-x)e^x-1$. Βρίσκουμε

$h'(x)=e^x(1-x)$, $x\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty}h(x)=-1$,

$\lim_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$ και έχουμε το διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$
h	-1 ↗ −	0 ↗ +	$e-1$	↘ + 0	↘ − $-\infty$

Προκύπτει ότι η h έχει μία, ακριβώς, ρίζα $x_1\in(-\infty,1)$, αφού δεν είναι το 1 και μία, ακριβώς, $x_2\in(1+\infty)$ και έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$
f″	−	0	+	+ 0	−
f	⌒	⌣	⌣	⌒	
		σ.κ		σ.κ.	

δ. Για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $x\le1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)\ge \ln(1-e^{-1})$,

οπότε $\int_0^1 f(x)dx > \ln(1-e^{-1})$.

ε. Είναι $\dots\Leftrightarrow F(\pi)+συνπ < F(e)+συνe$, (1).

Έστω $φ(x)=F(x)+συνx$, $x\in[e,\pi]$.

Βρίσκουμε φ ↓ $[e,\pi]$, οπότε η $(1)\Leftrightarrow\dots\Leftrightarrow\pi>e$, που ισχύει.

Θέμα 116

α. Είναι $f''(x)=e^{-x}+1-συνx>0$, $x\in\mathbb{R}$, αφού $e^{-x}>0$, $x\in\mathbb{R}$ και $συνx\le1\Leftrightarrow 1-συνx\ge0$, $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι κυρτή.

β. Έστω $g(x)=\frac23 f\left(\frac{3x}{2}\right)-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=\dots=f'\left(\frac{3x}{2}\right)-f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι κυρτή, οπότε f′ ↑ ℝ, άρα και 1 − 1.

Τότε:

- $g'(x)\Leftrightarrow\dots\overset{f':1-1}{\Leftrightarrow}\frac{3x}{2}=x\Leftrightarrow\dots\Leftrightarrow x=0$
- $g'(x)>0\Leftrightarrow\dots\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}\frac{3x}{2}>x\Leftrightarrow\dots\Leftrightarrow x>0$

Βρίσκουμε g ↑ $[0,+\infty)$.

Για $x>0$ είναι $g(x)>g(0)\Leftrightarrow\dots$.

γ. Είναι $f(x)\le\frac23 f\left(\frac{3x}{2}\right)$, $x>0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x=0$, οπότε $\int_0^1 f(x)dx<\frac23\int_0^1 f\left(\frac{3x}{2}\right)dx$, (1)

Θέτουμε $u=\frac{3x}{2}$ οπότε

$\int_0^1 f\left(\frac{3x}{2}\right)dx=\dots=\frac23\int_0^{\frac32}f(x)dx$

Τότε $(1)\Leftrightarrow\dots\Leftrightarrow 9\int_0^1 f(x)dx<4\int_0^{\frac32}f(x)dx$, (2).

δ. Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano για την

$h(x)=9x^2\int_0^1 f(x)dx-4x\int_0^{\frac32}f(x)dx-x+1$ στο $[0,1]$.

Είναι

$h(1)=9\int_0^1 f(x)dx-4\int_0^{\frac32}f(x)dx<0$, από την (2).

Θέμα 117

α. Είναι $f(x)=e^{x^2}\Leftrightarrow\dots\Leftrightarrow f(x)e^{-x^2}-1=0$, $x\in\mathbb{R}$

Έστω $g(x)=f(x)e^{-x^2}-1$, $x\in\mathbb{R}$

Βρίσκουμε $g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c$, $x\in\mathbb{R}$ και $c=0$.

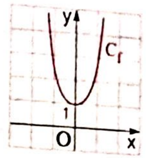
β. Είναι $\dots\Leftrightarrow F(2x)-F(x)+\ln(x+1)=0$, $x>-1$.

Βρίσκουμε F ↑ ℝ και την $x=0$ μοναδική ρίζα της (1).

γ. Είναι $F(x)\ge0$, $x\in[0,1]$, οπότε

$E=\int_0^1 F(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac12=[xF(x)]_0^1-\int_0^1 xF'(x)dx\Leftrightarrow\dots$.



δ. Έχουμε $\int_{F(1)}^{F(3)-6} f(x)dx=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dots\Leftrightarrow F(F(3)-6)=F(F(1))$, (1).

Είναι $F'(x)=f(x)=e^{x^2}>0$, $x\in\mathbb{R}$, άρα F ↑ ℝ, οπότε και 1 − 1. Οπότε

η $(1)\Leftrightarrow F(3)-6=F(1)\Leftrightarrow F(3)-F(1)=6$.

Από το Θ.Μ.Τ. για την F στο $[1,3]$, υπάρχει $ξ\in(1,3)$, ώστε $F'(ξ)=\frac{F(3)-F(1)}{3-1}\Leftrightarrow f(ξ)=\frac62=3$.

Από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για την f στο $[0,ξ]$, υπάρχει $x_0\in(0,ξ)\subseteq(0,3)$, ώστε $f(x_0)=2$.

Θέμα 118

α. Είναι $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2-1}>0$, $x\ne1$ και η f είναι συνεχής στο 1, άρα f ↑ ℝ, οπότε η f είναι και 1 − 1.

Βρίσκουμε $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

β. Είναι $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}>0$, $x\ne1$ και η f είναι συνεχής στο 1, άρα f ↑ ℝ, οπότε η f είναι και 1 − 1.

Είναι $f(x^4+3x)=f(5)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}\dots\Leftrightarrow x^4+3x-5=0$.

Έστω $g(x)=x^4+3x-5$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g(0)=-5<0$, $g(1)=-1$ και $g(2)=17>0$.

Παρατηρούμε ότι $g(1)g(2)<0$, οπότε εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για τη g στο $[1,2]$ και μονοτονία της g.

Άρα ένας ακέραιος είναι ο $\alpha=1$.

γ. Είναι $f(x)\le x$, (1), για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $f(x)\le x\Leftrightarrow x-\ln(x^2+1)\le x\Leftrightarrow\dots\Leftrightarrow x^2\ge0$, που ισχύει. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ στην (1) και προκύπτει $f^{-1}(x)\ge x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(x)\le x\le f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

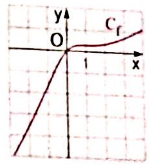
δ. Είναι $f(0)=0$ και $f(x)\ge0$, $x\ge0$, οπότε

$E=\int_0^1 f(x)dx$.

- Η εφαπτομένη της C_f στο $x=0$ είναι $y=x$ και αποδεικνύουμε ότι η f είναι κοίλη στο $[0,1]$, αφού $f''(x)=\dots=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}<0$, $x\in(0,1)$ και η f είναι συνεχής στα 0 και 1.

Οπότε $f(x)\le x$ και το "=" ισχύει μόνο για $x=0$, άρα $\dots E<\frac12$.

- Ισχύει $\ln x\le x-1$, $x>0$, οπότε θέτοντας όπου x το x^2+1, προκύπτει $\dots f(x)\ge x-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x^2+1=1\Leftrightarrow x=0$.



Άρα $\dots E>\frac16$, (1).

Θέμα 119

α. Βρίσκουμε $f'(x)=-e^{-x}+\frac1x$, $x>0$ και $f(x)=e^{-x}+\ln x$, $x>0$.

β. Είναι: • $f'(x)=\frac{e^x-x}{xe^x}>0$, για κάθε $x>0$, άρα f ↑ $(0,+\infty)$

- $f''(x)=\frac{x^2-e^x}{x^2e^x}=\frac{h(x)}{x^2e^x}$, $x>0$, όπου $h(x)=x^2-e^x$, $x\in\mathbb{R}$

Βρίσκουμε ότι η h′ παρουσιάζει μέγιστο στο ln2 το $h'(\ln2)=2\ln\frac2e<0$, οπότε $h'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα h ↓ ℝ, οπότε για $x>0\Rightarrow h(x)<h(0)=-1<0$

Επομένως $f''(x)<0$, $x>0$ άρα η f είναι κοίλη.

γ. Είναι $f(2x)-f(x)<xf'(2x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{f(2x)-f(x)}{2x-x}<f'(2x)$.

Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x,2x]$, $x>0$

δ. Είναι $g'(x)=\frac{(2f'(2x)-f'(x))x-(f(2x)-f(x))}{x^2}=$

$= \dots = \dfrac{[xf'(2x)-(f(2x)-f(x))]+x(f'(2x)-f(x))}{x^2} > 0$

για $x>0$ από το γ. ερώτημα και ότι $f' \uparrow (0,+\infty)$.

Θέμα 120

α. ► Έχουμε $f(x) \geq 2 = f(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f παρουσιάζει στο 0 ελάχιστο.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 , σύμφωνα με το Θ. Fermat, έχουμε $f'(0)=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f′	−	0	+
f	↘	2	↗

► Επειδή η f είναι κυρτή, η f′ είναι γνησίως αύξουσα.

• Για $x<0$ είναι $f'(x)<f'(0)=0$.

• Για $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)=0$.

Αφού, επιπλέον η f είναι συνεχής στο 0 , προκύπτει ότι $f \downarrow (-\infty, 0]$ και $f \uparrow [0,+\infty)$.

β. $\dots \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} = \lambda$, (1) . Θέτουμε $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$ και βρίσκουμε από το διπλανό πίνακα, ότι η (1) έχει, ακριβώς, δύο ρίζες, όταν $\lambda \in (-\infty, \frac{1}{e}]$ και $\lambda \in (0,\frac{1}{e})$, οπότε $\lambda \in (0,\frac{1}{e})$.

x	0	e	$+\infty$
g′		+ 0	−
g	$-\infty$ ↗	1/e	↘ 0

γ. Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την $x=0$.

• Για $x \neq 0$ είναι $f(x)>2$.

• Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ είναι $\varepsilon: y=-x+4$ και αφού η f είναι κυρτή, έχουμε $f(x) \geq -x+4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Βρίσκουμε $f(x+1) \geq 3-x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $f(x)+f(x+1)>5-x$, για κάθε $x \neq 0$.

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

δ. Έχουμε $f(x)>4-x>0$ κοντά στο 1 και $f \uparrow [0,+\infty)$, οπότε $f(f(x))-f(4-x)>0$, κοντά στο 1. Βρίσκουμε ότι το όριο είναι $+\infty$.

Θέμα 121

α. Είναι $f'(x)=e^x-x-\eta\mu x>0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $e^x - x \geq 1 \geq \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f \uparrow \mathbb{R}$.

β. $\dots \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \dfrac{\eta\mu 2x - \eta\mu x}{2x-x} > \sigma\upsilon\nu 2x$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την $h(x)=\eta\mu x$ στο $[x, 2x] \subseteq (0,\frac{\pi}{2})$.

γ. Για $x \in (0,1)$ είναι $\dots \Leftrightarrow x+\ln x+e^{-x}=0$.

Έστω $h(x)=x+\ln x+e^{-x}$, $x>0$.

Είναι $h'(x)=\dfrac{1}{x}+(1-e^{-x})>0$, για κάθε $x>0$.

Άρα $h \uparrow (0,+\infty)$.

Βρίσκουμε ότι $0 \in h((0,1))=(-\infty, 1-e^{-1})$.

δ. $\dots \Leftrightarrow f(2)-\sigma\upsilon\nu 1 < f(3)-\sigma\upsilon\nu 2$, (1)

Έστω $\varphi(x)=f(x+1)-\sigma\upsilon\nu x$, $x \in [1,2]$.

Βρίσκουμε $\varphi \uparrow [1,2]$,

οπότε η (1) $\Leftrightarrow \dots \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} 1<2$, που ισχύει.

Θέμα 122

α. • Για $x \neq 0$ είναι $\dots \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}+x$.

• Η f είναι συνεχής, οπότε $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dots=1$.

β. • Είναι $f'(x)=\dfrac{x^2-x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{x^2}$, $x \neq 0$.

Έστω $g(x)=x^2-x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$, $x \neq 0$.

Βρίσκουμε το διπλανό πίνακα.Άρα $g(x)>g(0) \Leftrightarrow g(x)>0$, για κάθε $x \neq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g′	−		+
g	↘	0 (ελ.)	↗

Οπότε $f'(x)>0$, για κάθε $x \neq 0$ και επειδή επιπλέον η f είναι συνεχής στο 0 , έχουμε $f \uparrow \mathbb{R}$. Άρα η f είναι 1–1 , οπότε αντιστρέφεται.

• Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f . Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχουμε $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$, αφού:

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to 0^-}\left(y\eta\mu\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}\right)=0+(-\infty)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dots=+\infty$.

γ. • Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\dots=0$, οπότε η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

• Η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (-\pi,\pi)$ είναι παράλληλη στην $y=x$, όταν $f'(x_0)=1$, (1) . Για $x \in (-\pi,\pi)-\{0\}$, η (1) $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_0\sigma\upsilon\nu x_0 - \eta\mu x_0 = 0$, (2) .

Έστω $h(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x \in (-\pi,\pi)$.

Βρίσκουμε $h \downarrow (-\pi,\pi)$, οπότε η h είναι 1–1 στο $(-\pi,\pi)$. Άρα η (2) $\Leftrightarrow h(x_0)=h(0) \overset{h:1-1}{\Leftrightarrow} x_0=0$, που απορρίπτεται.

Βρίσκουμε $f'(0)=1$ και ότι η εφαπτομένη είναι η $y=x+1$.

δ. Για κάθε $x \in (\pi,+\infty)$ έχουμε

$x>\pi \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(\pi) \Leftrightarrow f(x)>\pi$.

Έχουμε $f(x)>\dfrac{\eta\mu f(x)}{\pi-f(x)} \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}>\pi-f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(f(x))>f(\pi) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>\pi$, που ισχύει για κάθε $x>\pi$.

Θέμα 123

α. Για $x \in (1,2)$ είναι $\dots \Leftrightarrow e^{x-2}-\dfrac{1}{x}=0$, (1).

Έστω $g(x)=e^{x-2}-\dfrac{1}{x}$, $x>0$.

Βρίσκουμε $g \uparrow (1,2)$ και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για τη g στο $[1,2]$.

β. Είναι $\dots \Leftrightarrow (f(x)-x-1)+(f'(e^x)-f'(x+1))=0$, (1).

Η (1) έχει προφανή ρίζα την $x=0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ είναι $\varepsilon: y=x+1$ και η f είναι κυρτή.

Βρίσκουμε $f(x)-x-1>0$, για κάθε $x \neq 0$ και $f'(e^x)-f'(x+1)>0$, για κάθε $x \neq 0$.

γ. Θέτουμε $y=f'(x)$, οπότε

$\dots \overset{f':1-1}{\Longleftrightarrow} \dots \Leftrightarrow f(y)>y+1 \Leftrightarrow y \neq 0$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f'(x) \neq f'(0) \Leftrightarrow x \neq 0$

δ. i. Βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και με κριτήριο παρεμβολής το όριο είναι 0 .

ii. $\dots = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{f(x)-1}{x}-1\right)x\ln x\right]=$

$=\dots=(f'(0)-1)\cdot 0=0$.

Θέμα 124

α. • Η f είναι ορισμένη στο $A=(0,+\infty)$.

Επειδή η ευθεία $y=-x$ εφάπτεται της C_f στο $x_0=1$, έχουμε $f(1)=-1$ και $f'(1)=-1$.

Είναι $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-2\ln x+x}{x}$, $x>0$.

Έστω $h(x)=xf'(x)-2\ln x+x$, $x>0$.

Οπότε $g'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$, $x>0$.

Βρίσκουμε $h'(x)=0$, $x>0$, δηλαδή η g είναι σταθερή. Βρίσκουμε $f(x)=\ln^2 x - x$.

β. ► Είναι $f'(x)=\dfrac{2\ln x-x}{x}$, $x>0$.

Έστω $g(x)=2\ln x-x$, $x>0$.

Είναι $g'(x)=\dfrac{2-x}{x}, x>0$ και βρίσκουμε το διπλανό πίνακα.

x	0	2	$+\infty$
g′		+ 0	−
g	↗	$\ln\frac{4}{e^2}$ (μεγ.)	↘

Άρα $g(x) \leq g(2)=\ln\dfrac{4}{e^2}<0$, $x>0$,

οπότε $f'(x)<0$, $x<0$, άρα $f \downarrow (0,+\infty)$.

Βρίσκουμε $f(A)=\mathbb{R}$.

► Έχουμε $\dots \Leftrightarrow f(e^{-x}x^{\ln x})=-1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x)=0$, $x \in (0,1)$. Βρίσκουμε $f((0,1))=\dots=(-1,+\infty)$.

γ. Έχουμε $f(3^x+4^x)>f(5^x) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} 3^x+4^x<5^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x-1<0$, (1) .

Έστω $h(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x-1$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $h(2)=0$ και $h'(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x\ln\dfrac{3}{5}+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x\ln\dfrac{4}{5}<0$, $x \in \mathbb{R}$, άρα $h \downarrow \mathbb{R}$.

Επομένως η $(1) \Leftrightarrow h(x) < h(2) \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} x > 2$.

δ. Για $x \in (0, +\infty)$ είναι

$f(x^2) = f(2^x) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x^2 = 2^x$, (2) .

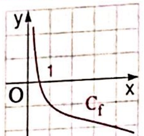
Προφανείς ρίζες της (2) είναι οι $x = 2$ και $x = 4$.

Η $(2) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{\ln 2}{2} = 0$, (3) .

Έστω $\varphi(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{\ln 2}{2}$,

x	0	2	e	4	+∞
φ′		+	0	−	
φ		↗		↘	

$x > 0$. Επειδή
$\varphi(2) = \varphi(4) = 0$ και
$\varphi \uparrow (0, e]$, $\varphi \downarrow [e, +\infty)$
η εξίσωση (3) έχει ακριβώς δύο ρίζες τις $x = 2$ και $x = 4$.



Θέμα 125

α. Είναι $f'(x) = \ldots = \dfrac{x^4 - x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2} > 0$, για κάθε $x \neq \pm 1$.

β. Αν $\Delta_1 = (-\infty, -1)$, $\Delta_2 = (-1, 1)$, $\Delta_3 = (1, +\infty)$ βρίσκουμε $f(\Delta_1) = f(\Delta_2) = f(\Delta_3) = \mathbb{R}$.

γ. • Για $x = 1$ ή $x = -1$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

• Για $x \neq \pm 1$ είναι $\ldots \Leftrightarrow x^3 - 2x = \alpha(x^2 - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f(x) = \alpha$. Επειδή $\alpha \in f(\Delta_1), f(\Delta_2), f(\Delta_3)$ και η f είναι γνησίως μονότονη στα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$, έχει, ακριβώς, τρεις ρίζες.

δ. Αποδεικνύουμε ότι η f είναι περιττή και ότι

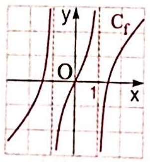
$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$. Είναι $f(x) \geq 0$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$f(x) \leq 0$, $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$ οπότε

$E = -\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \ldots = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx =$

$= \ldots = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - \dfrac{2x}{x^2 - 1})dx$

$= \ldots = \dfrac{1}{4} - \ln\dfrac{3}{4}$.



Θέμα 126

α. Είναι $f'(x) = \ldots =$
$= x(2 - x)e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$
και έχουμε το διπλανό πίνακα.

x	−∞	0		2	+∞
f′	−	0	+	0	−
f	+∞ ↘	0	↗	4/e	↘ 0

Αν $\Delta_1 = (-\infty, 0)$, $\Delta_2 = [0, 2]$ και $\Delta_3 = (2, +\infty)$, βρίσκουμε $f(\Delta_1) = (0, +\infty)$, $f(\Delta_2) = [0, \frac{4}{e}]$ και

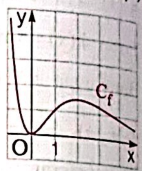
$f(\Delta_3) = (0, \frac{4}{e})$, οπότε $f(A) = [0, +\infty)$.

Επειδή $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$, έχουμε $f(x^2 - e^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow x^2 - e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f(x) = 1$, (1) .

Επειδή $1 \in f(\Delta_1)$, $1 \in f(\Delta_2)$ και $1 \in f(\Delta_3)$,

η εξίσωση (1) έχει, μία, τουλάχιστον, ρίζα στα Δ_1 , Δ_2 και Δ_3 . Επειδή, επιπλέον, η f είναι γνησίως μονότονη στα Δ_1 , Δ_2 και Δ_3 η εξίσωση (1) έχει, ακριβώς, τρεις πραγματικές ρίζες.



β. Είναι:
$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

• $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$, (1) .

Αν x_1 , x_2 , $(x_1 < x_2)$ οι ρίζες της (1),

τότε από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f παρουσιάζει καμπή στα x_1 και x_2 . Για τις ρίζες x_1 , x_2 βρίσκουμε $x_1 + x_2 = 4$ και $x_1 x_2 = 2$.

x	−∞	x_1		x_2	+∞
f″	+	0	−	0	+
f	∪		∩		∪
		σ.κ.		σ.κ.	

Οπότε η εξίσωση γίνεται

$\ldots \Leftrightarrow f(x^2 - e^{x-1}) = 0 \overset{\alpha.}{\Leftrightarrow} f(x) = 1$.

γ. • Αποδεικνύουμε ότι η g είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{4}]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{\pi}{4})$ με

$g'(x) = -f'(\frac{\pi}{4} - x)\eta\mu x + f(\frac{\pi}{4} - x)\sigma\upsilon\nu x$ και

$g(0) = g(\frac{\pi}{4}) = 0$.

• Αφού ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle για τη g

$[0, \frac{\pi}{4}]$, υπάρχει $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \ldots$

δ. Είναι $f(0) = 0$ και $f(x) \geq 0$, $x \in [0, 1]$.
Οπότε
$E = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2(-e^{1-x})'\,dx = \ldots = 2e - 5$.

Θέμα 127

α. • $\int_0^1 xf''(x)dx = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow [xf'(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)dx = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f(1) = 0$.

• Επειδή η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θ. Rolle στο $[1, 3]$ ισχύει $f(3) = f(1) = 0$.

• Έστω $g(x) = \dfrac{f(x) + 1}{x - 2}$, $x \in [0, 2) \cup (2, 3]$.

Είναι $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0$, $f(x) = (x - 2)g(x) - 1$ και επειδή η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, ισχύει $f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$.

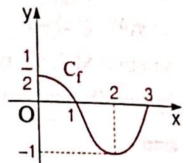
β. • $f \downarrow [0, 2]$, $f \uparrow [2, 3]$.

• Η f είναι κοίλη στο $[0, 1]$ και κυρτή στο $[1, 3]$.

• Η f παρουσιάζει στο 0 μέγιστο, στο 2 ελάχιστο και στο 3 τοπικό μέγιστο.

• Η f παρουσιάζει καμπή στο 1.

Η C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



γ. Για την $h(x) = f'(e)(x - 1)(x - 2) +$
$+\big(1 + f(\alpha)\big)x(x - 2) + \big(\beta + f(\beta)\big)x(x - 1)$, ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano στα $[0, 1]$, $[1, 2]$, αφού είναι συνεχής σε αυτά και επιπλέον

$h(0)h(1) < 0$ και $h(1)h(2) < 0$,

αφού: • $h(0) = 2f'(e) > 0$.

• $h(1) = -\big(f(\alpha) + 1\big) < 0$, αφού $f(x) \geq f(2) = -1$, για κάθε $x \in [0, 3]$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 2$.

• $h(2) = 2\big(f(\beta) + \beta\big) > 0$, αφού η f είναι κυρτή στο $[1, 3]$ και η εφαπτομένη της C_f στο 1 είναι η $y = -x + 1$.

Επιπλέον η h είναι τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού, οπότε έχει δύο, το πολύ ρίζες στο $(0, 2)$. Επομένως η h έχει δύο ακριβώς, ρίζες στο $(0, 2)$.

δ. i. Από το ερώτημα **γ.** έχουμε $f(x) \geq -x + 1$, για κάθε $x \in [1, 3]$, (1).
Θέτουμε στην (1) , όπου x το $2 - \eta\mu x \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. Η f είναι κοίλη στο $[0, 1]$, οπότε $f(x) \leq -x + 1$, $x \in [0, 1]$, άρα $\eta\mu x f(x) \leq (1 - x)\eta\mu x$, για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$ και $x = 1$. Άρα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu x f(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - x)\eta\mu x\,dx = \ldots =$.

Θέμα 128

α. Είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ldots = \dfrac{\varepsilon\varphi x - x}{x\varepsilon\varphi x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \ldots = 0 = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο 0 . Επιπλέον, η f είναι συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Άρα η f είναι συνεχής.

β. Είναι $f'(x) = \dfrac{x^2 - \eta\mu^2 x}{x^2\eta\mu^2 x}$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$.

Βρίσκουμε $x^2 - \eta\mu^2 x > 0$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$.

γ. Έστω $g(x) = e^{x^2} f(x)$, $x \in (-1, 1)$.

Βρίσκουμε ότι η g είναι περιττή.

Είναι $\int_{-1}^{1} e^{x^2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} g(x)dx + \int_0^1 g(x)dx$.

Αποδεικνύουμε ότι $\int_{-1}^{0} g(x)dx = -\int_0^1 g(x)dx$.

Άρα $\int_{-1}^{1} e^{x^2} f(x)dx = 0$.

δ. Για $x \in (-1, 1)$ η εξίσωση γράφεται

$(x + 1)f(x) + e^x - 1 = 0$, (1) .

• Η $x = 0$ είναι ρίζα της (1) .

• Αν $x \in (0, 1)$, τότε

$x > 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow (x + 1)f(x) + e^x - 1 > 0$

• Αν $x \in (-1, 0)$, τότε

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x + 1)f(x) + e^x - 1 < 0$

Άρα η (1) έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

Θέμα 129

α. Η f είναι συνεχής στα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, για κάθε $\alpha > 0$. Επιπλέον πρέπει να είναι συνεχής και στο 0 , οπότε $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha^\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Άρα $\alpha = 1$.

β. ► Είναι: • $f'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & , x<0 \\ \dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2} & , x>0 \end{cases}$.

► • Για $x<0$ είναι $f'(x)<0$.

• Έστω $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$, $x\geq 0$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$, $x>0$.

Βρίσκουμε $g\downarrow [0,+\infty)$, οπότε για

$x>0 \Leftrightarrow g(x)<g(0)\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f'(x)<0$.

Άρα $f\downarrow \mathbb{R}$, οπότε η f είναι 1–1, επομένως αντιστρέφεται.

Βρίσκουμε $D_{f^{-1}}=\left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$.

γ. Για το $\int_1^{\ln 2} f^{-1}(x)dx$ θέτουμε $u=f^{-1}(x)$ και

βρίσκουμε $\int_1^{\ln 2} f^{-1}(x)dx=\int_0^1 xf'(x)dx$.

Οπότε $...=\int_0^1 (xf(x))'dx=...=\ln 2$.

δ. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την F στο $[1,e]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(1,e)$, ώστε $F'(\xi)=\dfrac{F(e)-F(1)}{e-1}$.

Είναι $\xi>1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} ...$

2ος Τρόπος

Για κάθε $x\in[1,e]$ έχουμε: $x\geq 1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x)\leq f(1)$

και το "ίσον" ισχύει μόνο για $x=1$, άρα

$\int_1^e f(x)dx<\int_1^e f(1)dx \Rightarrow [F(x)]_1^e<(e-1)f(1)\Rightarrow$

$\Rightarrow F(e)-F(1)<(e-1)\ln 2 \Rightarrow e\cdot\ln 2-F(1)<e\cdot \ln 2-\ln 2$

$\Rightarrow F(1)>\ln 2$.

Θέμα 130

α. Εφαρμόζουμε για τη $h(x)=\ln x$ το Θ.Μ.Τ. στο $[x,x+1]$, $x>0$.

β. Είναι $f(x)=...=(x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $x>0$.

Βρίσκουμε $f'(x)=\left(\ln(x+1)-\ln x\right)-\dfrac{1}{x}<0$, $x>0$,

οπότε $f\downarrow (0,+\infty)$ και $f''(x)=\dfrac{1}{x^2(x+1)}>0$, $x>0$,

οπότε η f είναι κυρτή.

γ. Η εξίσωση γράφεται

$...\Leftrightarrow x-1+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}=(x+1)\ln 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=x\ln 2+\ln 2-x+1$

$\Leftrightarrow f(x)=(\ln 2-1)x+\ln 2+1$, (1).

Η εφαπτομένη της C_f στο $x=1$ είναι $y=(\ln 2-1)x+\ln 2+1$ και επειδή η f είναι κυρτή προκύπτει ότι η μοναδική λύση της (1) είναι η $x=1$.

δ. Έστω F μία παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$.

Έχουμε $\int_{g(2)}^{g(4)-2} f(x)dx=0\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow F(g(4)-2)=F(g(2))$, (2), αφού

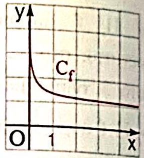
$g(2)>2>0$ και $g(4)>2\Rightarrow g(4)-2>0$.

Είναι $F'(x)=f(x)=$

$=(x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>0$, $x>0$. Άρα $F\uparrow (0,+\infty)$,

οπότε και 1 – 1. Τότε η $(2)\Leftrightarrow g(4)-2=g(2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(4)-g(2)=2$.



Από το Θ.Μ.Τ. για τη g στο $[2,4]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(2,4)$, ώστε

$g'(\xi)=\dfrac{g(4)-g(2)}{4-2}\Leftrightarrow g'(\xi)=1$.

Θέμα 131

α. Έχουμε $...\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)=1-\dfrac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow ...$.

β. Είναι $f(x)=x-\ln(x^2+1)=...=\ln\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Βρίσκουμε ότι $f\uparrow \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, αν θέσουμε $y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$ και $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Άρα $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ f(x)+x=f(y)+y \end{cases}$

Έστω $\varphi(x)=f(x)+x$, $x\in\mathbb{R}$. Βρίσκουμε ότι η φ είναι 1 – 1.

Άρα $\varphi(x)=\varphi(y)\overset{\varphi:1-1}{\Longleftrightarrow} ...\Leftrightarrow f(x)=x$.

$f(x)=x\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x=0$.

Οι C_f, $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινό σημείο το $O(0,0)$.

γ. Η ανίσωση ορίζεται για $x\in\mathbb{R}$ και είναι

$...\Leftrightarrow x^2-x<\ln\left((x^2+1)^2+1\right)-\ln\left((x+1)^2+1\right)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+1)-\ln\left((x^2+1)^2+1\right)<(x+1)-\ln\left((x+1)^2+1\right)$

$\Leftrightarrow f(x^2+1)<f(x+1)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} ...\Leftrightarrow 0<x<1$.

δ. Είναι $f''(x)=...=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε, έχουμε το διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		+	0	−	0	+	
f		∪ ↗	σ.κ.	∩ ↗	σ.κ.	∪ ↗	

Άρα $x_1=1$.

Η εφαπτομένη στο $O(0,0)$ έχει εξίσωση $y=x$.

Έστω $g(x)=f(x)-x=-\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g(0)=0$ και $g(x)\leq 0$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$E=...=\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$. Ισχύει $\ln x\leq x-1$, $x>0$ και θέτουμε όπου x το $x^2+1\geq 1$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε $\ln(x^2+1)\leq x^2$ και το "=" ισχύει μόνο για

$x^2+1=1\Leftrightarrow x=0$, άρα $...\Rightarrow E<\dfrac{1}{3}$.

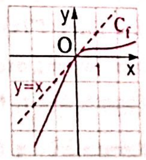
ε. Είναι $...\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} ...\Leftrightarrow -x^3+3x=\alpha$, (1).

Έστω $h(x)=-x^3+3x$, $x\in\mathbb{R}$.

Από το διπλανό πίνακα, έχουμε

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
h'		−	0	+	0	−	
h		↘	-2	↗	2	↘	

$h((-1,1))=(-2,2)$.



Η (1), δηλαδή η εξίσωση $h(x)=\alpha$, θα έχει, ακριβώς, μία λύση στο $(-1,1)$, αν και μόνο αν, $-2<\alpha<2$.

Θέμα 132

α. Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[xf\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[xf\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$

$\overset{y=1+\frac{1}{x}}{=} ...=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{f(y)}{y-1}$. Οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$.

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$, $x\neq 1$. Οπότε $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$ και $f(x)=(x-1)g(x)$.

Είναι: • $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=...=0\cdot 2=0$

• $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=...=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$

β. Η f' είναι συνεχής και ισχύει $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f' διατηρεί πρόσημο. Βρίσκουμε $f\uparrow \mathbb{R}$, οπότε η f είναι 1–1, άρα αντιστρέφεται.

Για $x>0$ είναι $f^{-1}(x)-f^{-1}(x^2)>\ln x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x)>f^{-1}(x^2)+\ln x$

$\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow f^{-1}(x)+\ln x>f^{-1}(x^2)+\ln x^2$, (1).

Βρίσκουμε $f^{-1}\uparrow \mathbb{R}$ και θεωρούμε την

$h(x)=f^{-1}(x)+\ln x$, $x>0$.

Βρίσκουμε $h\uparrow (0,+\infty)$, οπότε

η $(1)\Leftrightarrow h(x)>h(x^2)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x^2<x\overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0<x<1$.

γ. Είναι $2f^{-1}(x)=x+2\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{2}\Leftrightarrow$

$\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x)\right)=f\left(\dfrac{x+2}{2}\right)\Leftrightarrow x=f\left(\dfrac{x+2}{2}\right)$, (1).

Θέτουμε $y=\dfrac{x+2}{2}$, οπότε $x=2y-2$.

Η $(1)\Leftrightarrow 2y-2=f(y)$, (2).

Η ευθεία $y=2x-2$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$, και επειδή η f είναι κυρτή έχουμε $f(x)\geq 2x-2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου το ίσον ισχύει, μόνο για $x=1$. Δηλαδή

η $(2)\Leftrightarrow y=1\Leftrightarrow \dfrac{x+2}{2}=1\Leftrightarrow x=0$. Άρα $x=0$.

δ. i. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)\ln(x-1)\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{f(x)}{x-1}(x-1)\ln(x-1)\right)=2\cdot 0=0$,

αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)\overset{y=x-1}{=}\lim\limits_{y\to 0^+} y\ln y=...=0$.

ii. Είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)=\mathbb{R}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$. Είναι

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{f(x)e^{f(x)}}\overset{u=f(x)}{=\!=}\lim\limits_{u\to -\infty}\dfrac{1}{ue^u}==...\overset{\left(\frac{*}{*}\right)}{=}...=-\infty$.

Θέμα 133

α. Επειδή η f είναι κυρτή, έχουμε $f'\uparrow \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)-1}{\eta\mu x}$, $x\neq\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$. Είναι $\lim\limits_{x\to0}h(x)=0$ και $f(x)=\eta\mu x h(x)+1$.

Βρίσκουμε $f(0)=1$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}h(x)\right)=...=0$, οπότε $f'(0)=0$.

Από το διπλανό πίνακα προκύπτει ότι $f(x)\geq1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘	1 (ελ.)	↗

β. Είναι
$g'(x)=...=2f'(x)[f(x)-1]$, $x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0$ ή $f(x)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=0\Leftrightarrow x=0$,

αφού: • $f'(0)=0$ και $f'\uparrow\mathbb{R}$.

• $f(x)\geq1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$.

Οπότε για $x\neq0$ είναι $f(x)>1\Leftrightarrow f(x)-1>0$, άρα το πρόσημο της g' είναι το ίδιο με της f' .

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται η μονοτονία και τα ακρότατα της g .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	↘	-1 (ελ.)	↗

γ. Η συνάρτηση $\dfrac{\ln x}{g(2x)-g(x)}$, ορίζεται για $x>0$, οπότε

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{g(2x)-g(x)}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{g(2x)-g(x)}\cdot\ln x\right)=$$

$=(+\infty)(-\infty)=-\infty$, αφού:

$\lim\limits_{x\to0^+}(g(2x)-g(x))=...=0$ και επιπλέον, για $x>0$ είναι $2x>x\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}g(2x)-g(x)>0$.

δ. Έχουμε $g(x^2)+1=g(\eta\mu^2x)-g(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x^2)-g(\eta\mu^2x)+g(x)+1=0$, (1).

Είναι: • $|\eta\mu x|\leq|x|\Leftrightarrow...\overset{g\uparrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow}...\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x^2)-g(\eta\mu^2x)\geq0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$.

• $g(x)+1\geq0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα η (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}g(x^2)-g(\eta\mu^2x)=0\\ g(x)+1=0\end{cases}\Leftrightarrow...\Leftrightarrow x=0$.

Θέμα 134

α. Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x^2-x+1)-2}{x-1}=1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x^2-x+1)-2}{(x^2-x+1)-1}\cdot\frac{(x^2-x+1)-1}{x-1}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x^2-x+1)-2}{(x^2-x+1)-1}\cdot x\right)=1 .$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x^2-x+1)-2}{(x^2-x+1)-1}=$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x^2-x+1)-2}{(x^2-x+1)-1}\cdot x\cdot\frac{1}{x}\right)=1\cdot\frac{1}{1}=1 .$$

Θέτουμε $y=x^2-x+1$ και από την παραπάνω ισότητα βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=1$.

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-2}{x-1}$, $x>1$,

οπότε $f(x)=(x-1)g(x)+2$.

β. • Είναι $f'(x)\neq0$, για κάθε $x>1$ και η f' είναι συνεχής, οπότε η f' διατηρεί πρόσημο.

Βρίσκουμε $f\uparrow[1,+\infty)$, οπότε η f είναι 1-1.

• Η f παρουσιάζει στο 1 ελάχιστο το 2 .

γ. • Είναι $f''(x)\neq0$, για κάθε $x>1$ και η f'' είναι συνεχής, οπότε η f'' διατηρεί πρόσημο.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[1,2]$.

Βρίσκουμε ότι η f είναι κυρτή.

δ. • Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ είναι η $y=x+1$ και επειδή η f είναι κυρτή, έχουμε $f(x)\geq x+1$, για κάθε $x\geq1$.

Βρίσκουμε $D_{f^{-1}}=[2,+\infty)$.

• Για $x\geq2$ είναι $...\Leftrightarrow f(x-1)+f^{-1}(x)-3>0$, (1).

Έστω $h(x)=f(x-1)+f^{-1}(x)-3$, $x\geq2$.

Αποδεικνύουμε ότι $h\uparrow[2,+\infty)$ και $h(2)=0$.

Άρα η (1) $\Leftrightarrow...\Leftrightarrow x\geq2$.

Θέμα 135

α. Παραγωγίζουμε ως προς y , οπότε $...f'(xy)\cdot x=xf'(y)+f(x)$. Για $y=1$ είναι

$f'(x)\cdot x=x+f(x)\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=(\ln x)'$.

Βρίσκουμε $f(x)=x\ln x$, $x>0$.

β. Είναι $f'(x)=\ln x+1$, $x>0$.

Βρίσκουμε το διπλανό πίνακα.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	0 ↘	$-\frac{1}{e}$	↗ $+\infty$

• Αν $x\geq\dfrac{1}{e}$, τότε επειδή $f\uparrow[\dfrac{1}{e},+\infty)$ βρίσκουμε $x>2$.

• Αν $x\in(0,\dfrac{1}{e})$, τότε βρίσκουμε

$f\left((0,\dfrac{1}{e})\right)=(-\dfrac{1}{e},0)$ και επειδή $f(2)=2\ln2>0$, προκύπτει ότι η ανίσωση είναι αδύνατη στο διάστημα $(0,\dfrac{1}{e})$.

Άρα $x>2$.

γ. Είναι • $h(x)=(\ln x-2)^2(x-1)^2$, $x>0$

• $h'(x)=...=2(\ln x-2)(x-1)(\ln x-\dfrac{1}{x}-1)$,

• $h'(x)=0\Leftrightarrow...\Leftrightarrow(x=e^2$ ή $x=1$ ή $\ln x-\dfrac{1}{x}-1=0$

$x>0$. Για την $F(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}-1$, $x>0$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[1,e^2]$, οπότε υπάρχει $x_0\in(1,e^2)$ ώστε $F(x_0)=0$ και $F\uparrow(0,+\infty)$ άρα το x_0 είναι μοναδικό. Από τον παρακάτω πίνακα, έχουμε ότι η f παρουσιάζει στα $1, e^2$ τοπικά ελάχιστα και στο x_0 τοπικό μέγιστο.

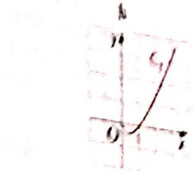
x	0		1		x_0		e^2		$+\infty$
$\ln x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$F(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
h		↘	τ.ε	↗	τ.μ	↘	τ.ε	↗	

δ. Είναι $...=\lim\limits_{h\to+\infty}\left[\dfrac{h(h^2+1)}{h^2+1}\left(f\left(e+\dfrac{1}{h}\right)-f(e)\right)\right]=$

$$=\lim_{h\to+\infty}\left[h\left(f\left(e+\frac{1}{h}\right)-f(e)\right)\right]=\lim_{h\to+\infty}\frac{f\left(e+\frac{1}{h}\right)-f(e)}{\frac{1}{h}}$$

$$\overset{u=\frac{1}{h}}{=\!=\!=}\lim_{u\to0}\frac{f(e+u)-f(e)}{u}$$

$=f'(e)=...=2$, αφού
$f'(x)=\ln x+1$, $x>0$.



Θέμα 136

α. ► Είναι $f''(x)=2e^{x-\lambda}-2$, $x\in\mathbb{R}$.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι το σημείο καμπής είναι το $(\lambda,-\lambda^2+2)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, το οποίο βρίσκεται στην παραβολή $y=-x^2+2$.

x	$-\infty$	λ	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	∩	σ.κ.	∪

► Επειδή το σημείο καμπής είναι το $K(1,1)$ είναι $(\lambda=1$ και $-\lambda^2+2=1)\Leftrightarrow\lambda=1$.

β. Για $\lambda=1$ είναι $f(x)=2e^{x-1}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Άρα:

• $f'(x)=2e^{x-1}-2x$, $x\in\mathbb{R}$

• $f''(x)=2e^{x-1}-2$, $x\in\mathbb{R}$

και προκύπτει ότι η f' παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο $x_0=1$ το $f'(1)=0$. Άρα $f'(x)>0$, $x\neq1$ και αφού η f είναι συνεχής στο 1 , έχουμε $f\uparrow\mathbb{R}$. Είναι $...\overset{1-1}{\Leftrightarrow}e^{x-1}=\dfrac{2}{x^2+1}\Leftrightarrow$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'	↘	0 (ελ.)	↗

$\Leftrightarrow...\Leftrightarrow f(x)=f(1)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}x=1$.

γ. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$...\Leftrightarrow(f(\alpha)+\alpha-1)(x-2)+(f(\alpha^2)-f(\alpha))(x-1)=0$,(1),

έχει μοναδική λύση στο $(1,2)$. Έστω

$F(x)=(f(\alpha)+\alpha-1)(x-2)+(f(\alpha^2)-f(\alpha))(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $F(1)=-f(\alpha)-\alpha+1$ και $F(2)=f(\alpha^2)-f(\alpha)$.

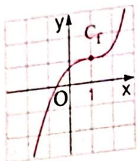
Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής $K(1,1)$ έχει εξίσωση $y=1$ και επειδή η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$, έχουμε $f(x)\geq1$, $x\geq1$, όπου το "=" ισχύει μόνο για $x=1$.

Οπότε: • $f(\alpha)>1 \Leftrightarrow f(\alpha)-1>0$, άρα

$f(\alpha)+\alpha-1>0 \Rightarrow F(1)<0$

• $\alpha>1 \Rightarrow \alpha^2>\alpha \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\alpha^2)>f(\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\alpha^2)-f(\alpha)>0 \Rightarrow F(2)>0$.



Για την F ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[1, 2]$ και επειδή $F'(x)=F(2)-F(1)>0$, είναι $F\uparrow (1, 2)$, οπότε η $F(x)=0$ θα έχει, ακριβώς, μία ρίζα.

δ. Είναι $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=$

$=f'(1)=0=g(1)$, οπότε η g είναι συνεχής στο 1 .

Έχουμε $g'(x)=\ldots=\dfrac{(x-1)f'(x)-f(x)+1}{(x-1)^2}$, $x>1$.

Έστω $h(x)=(x-1)f'(x)-f(x)+1$, $x\geq1$.

Είναι $h'(x)=(x-1)f''(x)>0$, $x>1$.

Άρα $h\uparrow [1,+\infty)$, αφού η h είναι συνεχής στο 1 .

Οπότε για $x>1 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x)>h(1)=0 \Rightarrow g'(x)>0$,

$x>1$. Άρα η $g\uparrow [1,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο 1 .

Θέμα 137

α. ► Έστω $G(x)=F\left(\dfrac{1}{x}\right)+F(x)$, $x>0$.

Είναι $G'(x)=\ldots=0$, οπότε η G είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$. Βρίσκουμε

$G(x)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow F\left(\dfrac{1}{x}\right)=-F(x)$, $x>0$, (1) .

► Είναι • $H(x)=F\left(\dfrac{1}{x}\right)\overset{(1)}{=}-F(x)$, $x>0$

• $H'(x)=-F'(x)=-\dfrac{1}{x^2+1}<0$, άρα $H\downarrow (0,+\infty)$.

Βρίσκουμε $H(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ και $H(x)\leq0$,

$x\in[1, 2]$, οπότε $E=-\int_1^2 H(x)dx=\ldots=\int_1^2 F(x)dx=$

$=[xF(x)]_1^2-\int_1^2 xF'(x)dx=\ldots=2F(2)-\dfrac{1}{2}\int_1^2\dfrac{2x}{x^2+1}dx$

$=\ldots=-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}+2F(2)$.

β. ► Αρκεί να δείξουμε ότι:

• $f(x)\geq e^{-x^2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow e^{x^2}\geq1+x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και

• $e^{-x^2}\geq1-x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

Ισχύει $e^x\geq x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θέτουμε:

• όπου x το x^2 και έχουμε

$e^{x^2}\geq x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$

• όπου x το $-x^2$ και έχουμε

$e^{-x^2}\geq1-x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

Τα "=" ισχύουν μόνο για $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

► Είναι $f(x)>0$, $x\in[0, 1]$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, έχουμε $E=\int_0^1 f(x)dx$. Επειδή

$f(x)\geq1-x^2$, $x\in\mathbb{R}$, έχουμε $f(x)-(1-x^2)\geq0$, $x\in\mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x=0$, άρα

$\int_0^1\left(f(x)-(1-x^2)\right)dx>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx>\left[x-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 \Leftrightarrow E>\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 3E>2$.

γ. Για την F ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x, 2x]$, $x>0$. Οπότε υπάρχει $\xi\in(x, 2x)$, ώστε

$F'(\xi)=\dfrac{F(2x)-F(x)}{2x-x} \Leftrightarrow F(2x)-F(x)=xf(\xi)$. Είναι

$f'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}<0$, $x\in(0,+\infty)$, άρα $f\downarrow (0,+\infty)$.

Έχουμε $x<\xi<2x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(\xi)>f(2x) \Leftrightarrow$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ldots\Leftrightarrow\dfrac{x}{4x^2+1}<F(2x)-F(x)<\dfrac{x}{x^2+1}$.

Βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{4x^2+1}$.

Από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(F(2x)-F(x)\right)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu\dfrac{1}{x}\overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=}\lim\limits_{y\to0}\eta\mu y=0$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(F(2x)-F(x)\right)\eta\mu\dfrac{1}{x}\right]=0\cdot0=0$.

δ. Είναι $1<4\int_0^1 t\left(\int_0^1 f(x)dx\right)dt<2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1<4\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1 t\,dt<2 \Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$

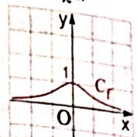
$\Leftrightarrow 1<2\int_0^1 f(x)\,dx<2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<\int_0^1 f(x)\,dx<1$. Έχουμε

$f'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}<0$, $x\in(0, 1]$, άρα $f\downarrow [0, 1]$,

αφού η f είναι συνεχής στο 0 .

Οπότε $0\leq x\leq1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}\ldots\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq1$ και τα ίσον ισχύουν μόνο για $x=1$ και $x=0$ αντίστοιχα.

Άρα



$\int_0^1\dfrac{1}{2}dx<\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 1\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<\int_0^1 f(x)dx<1$.

Θέμα 138

α. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=\ldots=e^{2x}(2x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ και έχουμε το διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		−	0	+	
f	1	↘	$\frac{2-e}{2}$	↗	$+\infty$

Έστω $\Delta_1=(-\infty,\dfrac{1}{2}]$ και

$\Delta_2=(\dfrac{1}{2},+\infty)$. Βρίσκουμε $f(\Delta_1)=[\dfrac{2-e}{2},1)$ και

$f(\Delta_2)=(\dfrac{2-e}{2},+\infty)$, οπότε $f(A)=[\dfrac{2-e}{2},+\infty)$.

β. Είναι $(x-1)e^x=-e^{-x} \Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow f(x)=0$, (1) .

Επειδή $0\in f(\Delta_1)$, $0\in f(\Delta_2)$ και η f είναι γνησίως μονότονη στα Δ_1 , Δ_2 , η εξίσωση (1) έχει, ακριβώς, δύο ρίζες.

γ. Είναι $g'(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$ και $h'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x>0$.

Οι εφαπτομένες των C_g και C_h στα $A(\alpha, e^\alpha)$ και $B(\beta, 2\sqrt{\beta})$ είναι αντίστοιχα:

• $\ldots\Leftrightarrow y=e^\alpha x+e^\alpha(1-\alpha)$

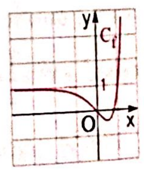
• $\ldots\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}x+\sqrt{\beta}$

Οι εφαπτομένες ταυτίζονται, αν και μόνο αν,

$\begin{cases} e^\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{\beta}} \\ e^\alpha(1-\alpha)=\sqrt{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\beta}=e^{-\alpha} & ,(1) \\ e^\alpha(1-\alpha)=e^{-\alpha}, & (2) \end{cases}$

Οπότε η $(2)\Leftrightarrow e^{2\alpha}(1-\alpha)=1\Leftrightarrow(\alpha-1)e^{2\alpha}+1=0$

$\Leftrightarrow f(\alpha)=0$, (3) .



Από το ερώτημα **β.** η ισότητα (3), ισχύει, ακριβώς, για δύο τιμές του α και από την (1) έχουμε δύο αντίστοιχες τιμές για το β . Άρα οι C_g και C_h έχουν, ακριβώς, δύο κοινές εφαπτομένες.

• Η μία ρίζα της (3) είναι η $\alpha_1=0$, οπότε υπάρχει $\varepsilon_1: y=x+1$.

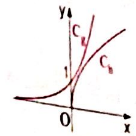
• Έστω α_2 η δεύτερη ρίζα της (3) .

Για την εφαπτομένη ε_2 η κλίση είναι $\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}=e^{\alpha_2}$,

οπότε αρκεί να δείξουμε $e^{\alpha_2}<e\Leftrightarrow\alpha_2<1$. Είναι

$f(\alpha_2)=0\Rightarrow(\alpha_2-1)e^{2\alpha_2}=-1<0$, οπότε... $\alpha_2<1$.

δ. • Οι C_g , C_h φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



• Αρκεί να δείξουμε

$2\sqrt{x}-1\leq x\leq e^x-1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\leq x+1\leq e^x$

$\Leftrightarrow h(x)\leq x+1\leq g(x)$, για κάθε $x>0$.

Βρίσκουμε ότι η g είναι κυρτή και η h είναι κοίλη.

Θέμα 139

α. • Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{5f^4(x)+1}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $f\uparrow\mathbb{R}$, άρα η f είναι 1-1 , επομένως αντιστρέφεται.

• Είναι $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.

Βρίσκουμε $f^{-1}(x)=x^5+x$, $x\in\mathbb{R}$.

β. Βρίσκουμε ότι η f^{-1} είναι περιττή, οπότε

$f^{-1}(-x)=-f^{-1}(x)$, για κάθε $x\in D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

Είναι: $\ldots\Leftrightarrow f(x-1)+f(x-3)-f^{-1}(2-x)<0$, (1) .

Έστω $g(x)=f(x-1)+f(x-3)-f^{-1}(2-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε η $(1)\Leftrightarrow g(x)<0$, (2) .

Βρίσκουμε $g\uparrow\mathbb{R}$ και

$g(2)=f(1)+f(-1)-f^{-1}(0)=f(1)-f(1)-0=0$, αφού οι f , f^{-1} είναι περιττές.

Οπότε η $(2)\Leftrightarrow g(x)<g(2)\Leftrightarrow x<2$.

γ. Είναι

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int_{-\pi}^{0} f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx+\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx$.

Για το $\int_{-\pi}^{0} f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx$ θέτουμε $x=-u$ και

βρίσκουμε $\int_{-\pi}^{0} f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx=-\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx$.

Άρα $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx = 0$.

δ. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\big(\ln f(x)\ln(f(x)+1)\big) =$

$$\overset{y=f(x)}{=} \lim_{y\to 0}\big(\ln y\cdot\ln(y+1)\big) = \lim_{y\to 0}\left(y\ln y\cdot\frac{\ln(y+1)}{y}\right)$$

$= 0\cdot 1 = 0$,

αφού: • $\lim\limits_{y\to 0} y\ln y = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln y}{\frac{1}{y}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \ldots = 0$

• $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(y+1)}{y} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \ldots = 1$

Θέμα 140

α. Είναι $f'(x) = \ldots = \dfrac{x^3-1+2\ln x}{x^3}$, $x>0$,

$f'(1)=0$. Έστω $g(x)=x^3-1+2\ln x$, $x>0$.

Είναι $g(1)=0$ και $g'(x)=3x^2+\dfrac{2}{x}>0$, $x>0$,

οπότε $g\uparrow(0,+\infty)$ και έχουμε το διπλανό πίνακα. Βρίσκουμε $f(A)=[1,+\infty)$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$	

$\lim\limits_{x\to 1^+}(f(x)-1)=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{f(x)-1}=+\infty$.

β. Βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$,

οπότε η ευθεία $\varepsilon: y=x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Έστω

$h(x)=f(x)-x=-\dfrac{\ln x}{x^2}$, $x>0$. Είναι $h(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

και για κάθε $x\in[1,\lambda]$, $\lambda>1$ είναι $h(x)\le 0$.

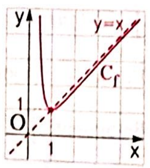
Αφού επιπλέον η h είναι συνεχής στο $[1,\lambda]$, έχουμε

$$E(\lambda) = -\int_1^{\lambda} h(x)dx = \ldots = \int_1^{\lambda}\left(-\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx =$$

$= \ldots = \dfrac{-1-\ln\lambda}{\lambda}+1$. Βρίσκουμε $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\ldots=1$,

αφού $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{-\ln\lambda-1}{\lambda} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \ldots = 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[\frac{1}{e},1]$ και $h(x)\ge 0$, $x\in[\frac{1}{e},1]$.



Οπότε $E(\Omega)=\int_{\frac{1}{e}}^{1} h(x)dx = \ldots = 1$.

Άρα $E(\Omega)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=1$.

γ. Είναι $g'(x)=\ldots=4f'(x)\left[f^3(x)-1\right]$, $x>0$ και

$f(x)\ge 1\Rightarrow\ldots\Rightarrow f^3(x)-1\ge 0$, για κάθε $x>0$ (α.)

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται η μονοτονία και τα ακρότατα της g .

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	-3	$\nearrow$	
			ελ.		

δ. Για $x>0$ είναι

$\ldots\Leftrightarrow g(e^{x-1})=g(x)$, (1) . Το 1 είναι ρίζα της (1) .

• Είναι $e^x\ge x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και θέτουμε όπου x το $x-1$, άρα $e^{x-1}\ge x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει για $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Οπότε για $x\in(0,1)$ είναι:

$$0<x<1\Rightarrow -1<x-1<0\Rightarrow\frac{1}{e}<e^{x-1}<1$$

και αφού $g\downarrow(0,1]$ είναι $e^{x-1}>x\Rightarrow g(e^{x-1})<g(x)$, για κάθε $x\in(0,1)$.

• Όμοια $g(e^{x-1})>g(x)$, για κάθε $x>1$.

Άρα η (1) έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

Θέμα 141

α. ► Είναι $f''(x)=\ldots=\dfrac{2e^{2x}+3e^x+2}{(e^x+1)^2}>0$, $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f κυρτή , οπότε $f'\uparrow\mathbb{R}$ άρα και 1 – 1.

► $\ldots\overset{f':1-1}{\Leftrightarrow} 2x^2+x=2\ln\dfrac{e^x+1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{2}x-\ln 2$, (1) . Η εφαπτομένη της

C_f στο $x_0=0$ έχει εξίσωση $y=-\dfrac{1}{2}x-\ln 2$.

Οπότε $f(x)\ge-\dfrac{1}{2}x-\ln 2$, $x\in\mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα η $(1)\Leftrightarrow x=0$.

β. Από το ερώτημα **α.** έχουμε $f(x)\ge-\dfrac{1}{2}x-\ln 2$,

$x\in\mathbb{R}$, όπου το "=" ισχύει μόνο για $x=0$.

Οπότε $e^{f(x)}\ge\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ και επειδή $\eta\mu x\ge 0$, για κάθε

$x\in[0,\pi]$ έχουμε $e^{f(x)}\eta\mu x\ge\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\eta\mu x$, για κάθε

$x\in[0,\pi]$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$ και

$x=\pi$. Οπότε $\int_0^{\pi}e^{f(x)}\eta\mu x\,dx>\int_0^{\pi}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\eta\mu x\,dx=1$.

Είναι $I=\int_0^{\pi}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\eta\mu x\,dx=$

$$=\left[-e^{-\frac{x}{2}}\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-\frac{x}{2}})\sigma\upsilon\nu x\,dx$$

$=\ldots=2e^{-\frac{\pi}{2}}+2-4I$. Οπότε $I=\dfrac{2e^{-\frac{\pi}{2}}+2}{5}$.

γ. • Είναι $f'\uparrow\mathbb{R}$ και $f'(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

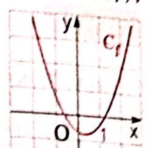
Οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$, ώστε $f'(x_0)=0$.

Βρίσκουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 .

• Είναι $f'(\frac{1}{2})=\dfrac{1}{\sqrt{e}+1}$, $f'(x_0)=0$.

δ. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,\beta)$,

ώστε $f'(\xi)=\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)+\ln 2}{\beta}$.



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,\beta]$. Είναι $f'\uparrow(0,\beta)$.

Θέμα 142

α. Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$.

Βρίσκουμε ότι $f\uparrow(0,+\infty)$ και η f είναι κοίλη.

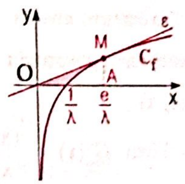
β. Η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0,f(x_0))$ είναι

$\varepsilon: y=\dfrac{1}{x_0}x+\ln(\lambda x_0)-1$ και διέρχεται από το

$O(0,0)$ αν και μόνο αν $\ldots\Leftrightarrow x_0=\dfrac{e}{\lambda}$.

Βρίσκουμε $\varepsilon: y=\dfrac{\lambda}{e}x$ και $M(\frac{e}{\lambda},1)$.

γ. Από το διπλανό σχήμα είναι



$$E(\lambda)=(OAM)-\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{e}{\lambda}}f(x)dx=$$

$=\ldots=\dfrac{e-2}{2\lambda}$.

δ. Είναι: • $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2E(\lambda)}{2-\sigma\upsilon\nu\lambda}=\ldots=\dfrac{(e-2)}{2}\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda}{2-\sigma\upsilon\nu\lambda}$

• $-1\le\sigma\upsilon\nu\lambda\le 1\Rightarrow\ldots\Rightarrow\dfrac{\lambda}{3}\le\dfrac{\lambda}{2-\sigma\upsilon\nu\lambda}\le\lambda$, $\lambda>0$

Βρίσκουμε $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2E(\lambda)}{2-\sigma\upsilon\nu\lambda}=+\infty$.

Θέμα 143

α. $\ldots\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=\dfrac{e^x}{x}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(f(x)e^{-x}\right)'=(\ln x)'\Leftrightarrow\ldots$

β. Είναι $f''(x)=e^x(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2})$, $x>0$.

Έστω $g(x)=\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$, οπότε

$f''(x)=e^xg(x)$, $x>0$.

Είναι $g'(x)=\ldots=\dfrac{x^2-2x+2}{x^3}>0$, $x>0$, άρα

$g\uparrow(0,+\infty)$ και βρίσκουμε $g((0,1))=(-\infty,1)$.

Οπότε η g έχει, ακριβώς, μία ρίζα έστω α στο $(0,+\infty)$ και μάλιστα $\alpha\in(0,1)$.

Είναι $g(\alpha)=0$ οπότε $f''(\alpha)=0$.

Για $x>\alpha\overset{g\uparrow}{\Rightarrow}g(x)>g(\alpha)=0\Rightarrow f''(x)=0$.

Για $0<x<\alpha\overset{g\uparrow}{\Rightarrow}g(x)<g(\alpha)=0\Rightarrow f''(x)<0$ και

έχουμε το διπλανό πίνακα.

x	0		α	1	$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	
			σ.κ.		

Άρα η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $K(\alpha,f(\alpha))$ με $\alpha\in(0,1)$.

γ. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,1)$,

ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha-1}$, (1) . Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για

την f στο $[\alpha,1]$. Είναι $f'\uparrow(\alpha,1)$.

δ. Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την

$h(x)=(x-2)\big(f(\alpha)+(1-\alpha)f'(\alpha)\big)+(x-1)f(\alpha)$ στο

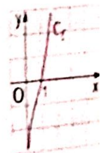
$[1,2]$. Είναι $h(1)=-\big(f(\alpha)+(1-\alpha)f'(\alpha)\big)$ και

$h(2)=f(\alpha)=e^{\alpha}\ln\alpha<0$, αφού $\alpha<1\Rightarrow\ln\alpha<0$.

Θα δείξουμε ότι $h(1)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\alpha)+(1-\alpha)f'(\alpha)<0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow f'(\alpha)<\dfrac{f(\alpha)}{\alpha-1}$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}f'(\alpha)<f'(\xi)\overset{f'\uparrow[\alpha,1]}{\Leftrightarrow}\alpha<\xi$, που ισχύει.



Είναι $h'(x)=-h(1)+h(2)<0$,

οπότε $h\downarrow(1,2)$.

Θέμα 144

α. $f'(x)=\frac{e^x-συνx}{e^x-ημx}$. Για κάθε $x>0$ είναι

$e^x>1\ge συνx \Rightarrow e^x-συνx>0$.

Άρα $f'(x)>0$, $x>0$, οπότε $f\uparrow[0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \overset{y=e^x-ημx}{=\!=} \lim\limits_{y\to+\infty}\ln y=+\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-ημx)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(1-\frac{ημx}{e^x}\right)=$

$=(+\infty)(1-0)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ημx}{e^x}=0$ με κριτήριο παρεμβολής. Οπότε $D_{f^{-1}}=[0,+\infty)$.

β. Ο άξονας συμμετρίας των C_f, $C_{f^{-1}}$ είναι η ευθεία $y=x$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=...=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{ημx}{e^x}\right)$.

Θέτουμε $y=1-\frac{ημx}{e^x}$. Έχουμε

$-1\le ημx\le 1\Rightarrow...\Rightarrow 1-\frac{1}{e^x}\le 1-\frac{ημx}{e^x}\le 1+\frac{1}{e^x}$.

Βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$,

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{y\to1}\ln y=0$

γ. Είναι $f''(x)=\frac{2e^xσυνx-1}{(e^x-ημx)^2}$. Έστω

$g(x)=2e^xσυνx-1$. Είναι: • $g'(x)=2e^x(συνx-ημx)$

• $g'(x)=0\Leftrightarrow...\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$

• $g'(x)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ... \overset{εφ\uparrow}{\Leftrightarrow} 0<x<\frac{\pi}{4}$

και έχουμε το διπλανό πίνακα.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
g'	+	0	−
g	1 ↗	α>0	↘ −1

Είναι $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=α>0$, αφού

$\frac{\pi}{4}>0\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{4}\right)>g(0)\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{4}\right)>1$.

δ. Είναι

$...\Leftrightarrow F\left((e^x-1)+3\right)-F(e^x-1)=F\left(\frac1x+3\right)-F\left(\frac1x\right)$, (1)

Έστω $G(x)=F(x+3)-F(x)$, $x\ge0$, οπότε η (1)

γίνεται $G(e^x-1)=G\left(\frac1x\right)$, (2).

Είναι $G'(x)=F'(x+3)-F'(x)=f(x+3)-f(x)$, $x\ge0$.

Για $x\ge0$ είναι $x+3>x \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x+3)>f(x)\Rightarrow$

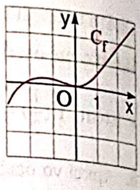
$\Rightarrow f(x+3)-f(x)>0$. Άρα $G'(x)>0$, $x\ge0$, οπότε $G\uparrow[0,+\infty)$, άρα η G είναι 1 − 1. Επομένως

η (2) $\overset{G:1-1}{\Leftrightarrow} e^x-1=\frac1x \Leftrightarrow e^x-\frac1x-1=0$, (3).

Έστω $h(x)=e^x-\frac1x-1$, $x>0$.

Είναι $h'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$, $x>0$, οπότε $h\uparrow(0,+\infty)$

και βρίσκουμε $h((0,+\infty))=\mathbb{R}$.



Επειδή $0\in h((0,+\infty))$ και η h είναι γνησίως μονότονη στο $(0,+\infty)$, η εξίσωση $h(x)=0$, δηλαδή η (3) έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

Θέμα 145

α. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $...\Leftrightarrow \frac{1+f^2(x)}{e^{f(x)}}=e^x$, (1).

Έστω $h(x)=\frac{1+x^2}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow h(f(x_1))=h(f(x_2)) \overset{(1)}{\Rightarrow}...\Rightarrow x_1=x_2$.

Άρα η f είναι 1−1, οπότε αντιστρέφεται.

Οπότε η (1) $h(f(x))=e^x$, $x\in\mathbb{R}$, (2).

Θέτουμε στη (2), όπου x το $f^{-1}(x)$,

οπότε η (2) $\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ln(1+x^2)-x$, $x\in\mathbb{R}$.

β. • Είναι $G'(x)=g(x)=f^{-1}(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Βρίσκουμε $f^{-1}\downarrow\mathbb{R}$.

Στο διπλανό πίνακα φαίνεται η μονοτονία της G.

x	−∞	0	+∞
G'	+	0	−
G	↗		↘

• Είναι $G''(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2+1}<0$, για κάθε $x\ne1$ και επειδή η G είναι συνεχής, είναι κοίλη.

γ. • Είναι $G\downarrow[0,1]$ και βρίσκουμε $G(x)\ge0$, για κάθε $x\in[0,1]$. Οπότε

$E=\int_0^1 G(x)dx=[xG(x)]_0^1-\int_0^1 xf^{-1}(x)dx=$

$=...=\frac13-\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx=...=\frac56-\ln2$.

δ. • Είναι $F'(x)=...=-xf^{-1}(x)>0$, για κάθε $x>0$, οπότε $F\uparrow(0,+\infty)$.

• Έχουμε $...\Leftrightarrow G(x)>xg(x)+1-\ln2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow...\Leftrightarrow F(x)>F(1)\overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow}x>1$, που ισχύει.

Θέμα 146

α. Είναι $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}>0$, για κάθε $x>1$, οπότε η f είναι 1−1, άρα η f αντιστρέφεται.

Βρίσκουμε $D_{f^{-1}}=f((1,+\infty))=(e,+\infty)$.

β. Για κάθε $x>1$ είναι $...\Leftrightarrow f(f(x))>f(e)$

$\Leftrightarrow f(x)>e$, που ισχύει από το ερώτημα α..

γ. Για κάθε $x>e$ είναι $...\Leftrightarrow \frac{e^{f^{-1}(x)}}{f^{-1}(x)}=3e^{x-3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow...\Leftrightarrow 3e^{x-3}-x=0$, (1).

Έστω $g(x)=3e^{x-3}-x$, $x>e$.

Βρίσκουμε $g(x)\ge g(3)=0$, για κάθε $x>e$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=3$.

Οπότε η $(1)\Leftrightarrow x=3$.

δ. Είναι $...\Leftrightarrow F(3)-e^3<F(2)-e^2$, (1).

Έστω $G(x)=F(x)-e^x$, $x>1$.

Βρίσκουμε $G\downarrow(1,+\infty)$, οπότε η $(1)\Leftrightarrow...\Leftrightarrow 3>2$, που ισχύει.

Θέμα 147

α. Έχουμε $\int_0^\pi[f(x)+f''(x)]ημx\,dx=6\Leftrightarrow...\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\int_0^\pi f(x)(συνx)'dx+\int_0^\pi(f'(x))'ημx\,dx=6$

$\Leftrightarrow...\Leftrightarrow f(0)=1$.

β. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε

$...\Leftrightarrow f(x)-e^x-\ln(x^2+1)\le0$.

Έστω η $g(x)=f(x)-e^x-\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

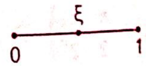
Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $g(x)\le g(0)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat είναι

$g'(0)=0\Leftrightarrow...\Leftrightarrow f'(0)=1$

γ. Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Μ. Τ. στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει $ξ\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$f'(ξ)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-1>1$,



δ. Η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Μ. Τ. στο $[0,ξ]$, οπότε υπάρχει $ξ_1\in(0,ξ)$, τέτοιο ώστε

$f''(ξ_1)=\frac{f'(ξ)-f'(0)}{ξ-0}=\frac{f'(ξ)-1}{ξ}>0$

Άρα $f''(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι κυρτή.

Θέμα 148

α. Η g έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$.

Είναι $g'(x)=...=-4x\ln x$, $x>0$ και έχουμε το διπλανό πίνακα.

x	0	1	+∞
g'	+	0	−
g	1 ↗	2	↘ −∞

Έστω $Δ_1=(0,1]$ και $Δ_2=(1,+\infty)$. Είναι $g(Δ_1)=(1,2]$ και $g(Δ_2)=(-\infty,2)$. Άρα $g(A)=(-\infty,2]$. Επειδή $0\in g(Δ_2)$, $0\notin g(Δ_1)$ και η g είναι γνησίως μονότονη στο $Δ_2$, έχουμε ότι η g έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$ και μάλιστα στο $Δ_2$.

β. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα και ότι το πρόσημο της f' αλλάζει εκατέρωθεν της ρίζας.

Είναι $f'(x)=...=\frac{g(x)}{x\cdot(1+x^2)^2}$, $x>0$.

Οπότε $f'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0$, (1).

Από το ερώτημα α. η (1) έχει μοναδική ρίζα, έστω $α>1$ και προκύπτει ο διπλανός πίνακας. Άρα στο σημείο $M(α,f(α))$ η f

x	0	1	α	+∞
f'	+	+	0	−
f	↗		μεγ.	↘

παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο το $f(α)=\frac{\ln α}{1+α^2}$.

Είναι $g(α)=0\Leftrightarrow 1+α^2-2α^2\ln α=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+α^2=2α^2\ln α\Leftrightarrow\frac{\ln α}{1+α^2}=\frac{1}{2α^2}$.

Οπότε $f(α)=\frac{1}{2α^2}=h(α)$.

Άρα το $M(α,h(α))$ βρίσκεται στην C_h.

γ. ► Είναι $F'(x)=f(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$, $x>0$.

► Αρκεί να δείξουμε ότι η $G(x)=F\left(\frac1x\right)-F(x)$, $x>0$ είναι η μηδενική συνάρτηση.

Είναι

$G'(x)=F'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)-F'(x)=\dots=0\ ,\ x>0$

$\Rightarrow G(x)=c\ ,\ x>0$ και $G(1)=0\Rightarrow c=0$, άρα

$G(x)=0\Leftrightarrow\dots\Leftrightarrow F\left(\frac{1}{x}\right)=F(x)\ ,\ x>0\ ,\ (1).$

► Είναι $\int_1^2 F(x)dx \overset{(1)}{=} \int_1^2 F\left(\frac{1}{x}\right)dx =$

$\overset{u=\frac{1}{x}}{=} \int_1^{\frac{1}{2}} F(u)\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{F(u)}{u^2}du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{F(x)}{x^2}dx$.

δ. Αρκεί να δείξουμε για $x>0$, ότι

$\int_1^2 F(x)dx > \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{F(x)}{x}dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{F(x)}{x^2}dx > \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{F(x)}{x}dx \Leftrightarrow$

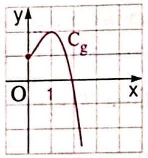
$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{F(x)(1-x)}{x^2}dx>0$. Είναι

$F'(x)=f(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$,

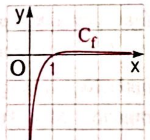
$x>0$ και έχουμε το διπλανό πίνακα.

x	0	1	+∞
F′		− 0 +	
F		↘ 0 ↗	
		ελ.	

Οπότε $F(x)\ge F(1)=0$, $x>0$ όπου το "=" ισχύει μόνο για $x=0$ και $1-x\ge 0$, $x\in[\frac{1}{2},1]$.



Άρα $\frac{F(x)(1-x)}{x^2}\ge 0$, $x\in[\frac{1}{2},1]$ και το "=" ισχύει μόνο για $x=1$, οπότε $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{F(x)(1-x)}{x^2}dx>0$.



Θέμα 149

α. Είναι $f'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$, για κάθε $x\neq 0$.

Οπότε f↑ $(-\infty,0)$, f↑ $(0,+\infty)$.

β. Είναι $f''(x)=e^{x-1}-\frac{2}{x^3}$, $x\neq 0$ και

$f^{(3)}(x)=e^{x-1}+\frac{6}{x^4}>0$, για κάθε $x\neq 0$,

οπότε f″↑ $(-\infty,0)$, f″↑ $(0,+\infty)$.

Βρίσκουμε $f''((-\infty,0))=(0,+\infty)$ και $f''((0,+\infty))=\mathbb{R}$.

Επειδή $0\notin f''((-\infty,0))$, ενώ $0\in f''((0,+\infty))=\mathbb{R}$ και f″↑ $(0,+\infty)$ η f″ έχει μοναδική ρίζα $x_0\in(0,+\infty)$.

Από το διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η C_f έχει καμπή στο σημείο $K(x_0,f(x_0))$.

x	−∞	0	x_0	+∞
f″	+ (0 ↗ +∞)		− (−∞ ↗) 0	+ (↗ +∞)
f	⌣		⌢	⌣
			σ.κ.	

Είναι $f''(x_0)=0$, $f''(1)=-1$ και f″↑ $(0,+\infty)$.

γ. Είναι $\dots=\left[e^{f(x)}\cdot f(x)\right]_1^2-\int_1^2 e^{f(x)}\cdot f'(x)dx=$

$=\dots=e^{e-\frac{1}{2}}(e-\frac{3}{2})+1$.

δ. Για $x>0$ είναι

$\dots\Leftrightarrow g(x)-e^{x-1}+\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow g(x)-f(x)=0$, (1).

Έστω $h(x)=g(x)-f(x)$, $x>0$. Βρίσκουμε ότι η h είναι 1−1 . Οπότε η (1) $\Leftrightarrow h(x)=h(1)\Leftrightarrow x=1$.

Θέμα 150

α. Είναι • $f'(x)=εφx(εφx-1)$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

• $f'(x)=0\Leftrightarrow\dots\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{\pi}{4}$.

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται η μονοτονία και τα ακρότατα της f .

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
f′	+	0 −	0 +	
f	↗	0 ↘	$\frac{4-\pi-\ln 4}{4}$ ↗	
		τ.μ	τ.ε.	

β. Είναι $f''(x)=\frac{2εφx-1}{συν^2x}$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Έστω $g(x)=2εφx-1$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Οπότε $f''(x)=\frac{g(x)}{συν^2x}$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Βρίσκουμε το διπλανό πίνακα.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
g′	+	
g	−∞ ↗	+∞

Επειδή $g\left((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\right)=\mathbb{R}$, το $0\in g\left((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\right)$ άρα η εξίσωση

$g(x)=0\Leftrightarrow f''(x)=0$, έχει ρίζα $x_0\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ και αφού g↑ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, θα είναι μοναδική.

x	$-\frac{\pi}{2}$	x_0	$\frac{\pi}{2}$
f″	−	0 +	
f	⌢	⌣	

Από το διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής.

Είναι

$g(x_0)=0$, $g(\frac{\pi}{6})=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}>0$ και g↑ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

γ. Η εφαπτομένη της C_f στο $x=x_0$ έχει εξίσωση $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Επιπλέον η C_f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής στο x_0 , από το ερώτημα β. . Οπότε η C_f και η εφαπτομένη έχουν μοναδικό κοινό σημείο, το σημείο επαφής. Άρα η εξίσωση

$f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,

έχει μοναδική ρίζα τη $x=x_0$.

δ. Για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ βρίσκουμε ότι

$\frac{\pi}{4}-x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$. Επιπλέον η f παρουσιάζει μόνο για $x=0$ μέγιστο στο $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$.

Οπότε $f(x)\le 0$, για κάθε $x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα $f(\frac{\pi}{4}-x)=0\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}-x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

Θέμα 151

α. Είναι $f'(x)=\frac{2e^x-x^2}{x^2e^x}$, $x\neq 0$.

Έστω $g(x)=2e^x-x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2e^x}$, $x\neq 0$.

Βρίσκουμε $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, οπότε $0\in g(\mathbb{R})$ και αφού g ↑ $\mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $g(x_0)=0$.

Είναι $g(0)=2$, οπότε

$g(x_0)<g(0)\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}x_0<0$ και έχουμε το διπλανό πίνακα.

x	−∞	x_0	0	+∞
g	− ↗	0 ↗ +		

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .

x	−∞	x_0	0	+∞
f′	−	0 +		+
f	+∞ ↘	↗ +∞		−∞ ↗ 0
		τ.ε.		

β. Είναι $g(x_0)=0$, $g(-1)=\frac{2-e}{e}<0$ και g↑$\mathbb{R}$.

γ. ► Είναι: • $f(x_0)=e^{-x_0}-\frac{2}{x_0}$

• $g(x_0)=0\Leftrightarrow\dots\Leftrightarrow e^{x_0}=\frac{x_0^2}{2}$.

Οπότε $f(x_0)=\frac{2}{x_0^2}-\frac{2}{x_0}$.

Άρα το σημείο $M(x_0,f(x_0))$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $h(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}$.

► Είναι: • $h'(x)=\frac{2x-4}{x^3}$, $x\neq 0$.

• $x^3=0\Leftrightarrow x=0$

• $2x-4=0\Leftrightarrow x=2$.

Στο διπλανό πίνακα φαίνεται η μονοτονία της h .

x	−∞	0	2	+∞
h′	+	−	0 +	
h	↗	↘	↗	

δ. • Από το ερώτημα α. έχουμε:

$f(x)\ge f(x_0)=\frac{2}{x_0^2}-\frac{2}{x_0}$, για κάθε $x<0$.

• Είναι: • $0>x_0>-1 \overset{h\downarrow(-\infty,0)}{\Rightarrow} h(x_0)>h(-1)=4$

Οπότε $f(x_0)=h(x_0)>4$, άρα $f(x)>4$, για κάθε $x<0$.