

δ. Η εφαπτομένη  $\epsilon$  της  $C_f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$  είναι  $\epsilon: y = cx - 1$  και η  $f$  είναι κυρτή. Η  $\epsilon$  τέμνει τον  $x$ 's στο σημείο  $B(e^{-1}, 0)$  και βρίσκεται κάτω από τη  $C_f$ , εκτός του σημείου επαφής, αφού η  $f$  είναι κυρτή. Οπότε

$$E = \int_0^1 f(x) dx - (AB\Gamma) = \dots = \frac{e^2 - 2e - 1}{2e}$$
**Θέμα 49**

α. i. Βρίσκουμε  $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ ,  $x \in (0, 1)$ .

ii. • Για  $x_1, x_2 \in (0, 1)$  με  $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 = x_2$ .

• Βρίσκουμε  $h^{-1}(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

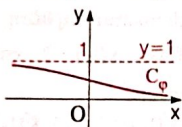
β. Βρίσκουμε  $\varphi \downarrow \mathbb{R}$ , η  $\varphi$  είναι κοίλη στο  $(-\infty, 0]$ , κυρτή στο  $[0, +\infty)$  και παρουσιάζει καμπή στο 0.

Το σημείο καμπής είναι το  $(0, \frac{1}{2})$ .

γ. • Βρίσκουμε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ , οπότε οι ευθείες  $y = 1$  και  $y = 0$  είναι οριζόντιες ασύμπτωτες της  $C_\varphi$  στο  $-\infty$  και  $+\infty$ , αντίστοιχα.

• Η  $C_\varphi$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

δ. Είναι  $\varphi(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in [0, 1]$ .



Οπότε  $E = \int_0^1 \varphi(x) dx = \dots = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$

$$= \int_0^1 \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} dx = \dots = [x - \ln(e^x + 1)]_0^1 = \dots = \ln \frac{2e}{e+1}$$

**Θέμα 50**

α. Βρίσκουμε  $f \uparrow \mathbb{R}$  και  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Οπότε  $0 \in f(\mathbb{R})$ , άρα η  $f$  έχει ρίζα  $x_0 \in \mathbb{R}$ , που είναι μοναδική, αφού  $f \uparrow \mathbb{R}$ . Επειδή  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f(x_0) = 0$  και  $f \uparrow \mathbb{R}$  είναι  $x_0 > 0$ .

β. Για  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $\dots \Leftrightarrow f(f(x)) > 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(f(x)) > f(2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x > 1$$

γ. Για  $x > 0$  είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{f(2x) - f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f'(2x) - f'(x)} \ln x = \dots = -\infty$$

αφού  $0 < x < 2x \Rightarrow f(2x) - f(x) > 0$  και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(2x) - f(x)) = 0$$

δ. Βρίσκουμε  $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = 2 \ln 2 + 1$ .

**Θέμα 51**

α. • Είναι  $f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0$ , για κάθε  $x \neq 1$

και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο 1, έχουμε  $f \uparrow \mathbb{R}$ , δηλαδή η  $f$  είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

• Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \frac{1}{x^2+1} = \dots = 0$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \dots = +\infty$$

Βρίσκουμε  $D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$ .

β. Για  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $\dots \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot 2 > e^{(1+f^2(x))} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(f(x)) > \frac{e}{2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) > 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x > 0$$

γ. • Είναι  $e^x \geq x + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και το ίσον ισχύει μόνο για  $x = 0$ .

• Για  $x \in \mathbb{R}$  η εξίσωση γίνεται

$$\dots \Leftrightarrow f^{-1}(e^x - x) - f^{-1}(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\dots \Leftrightarrow e^x - x = 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 0$$

δ. Για  $x > 1$  είναι  $x^2 > x \Rightarrow f(x^2) - f(x) > 0$ .

Βρίσκουμε ότι το όριο είναι  $-\infty$ .

**Θέμα 52**

α. Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dots = \frac{1}{2}$

Άρα  $f'(0) = \frac{1}{2}$ . Βρίσκουμε  $y = \frac{1}{2}x + 1$ .

$$\beta. \text{ Είναι } f'(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = xe^x - e^x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και αποδεικνύουμε ότι  $h(x) > 0$ ,  $x \neq 0$ . Οπότε  $f \uparrow \mathbb{R}$ . Βρίσκουμε  $D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$ .

γ. Βρίσκουμε  $g(x) = -x^2 + 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Η εφαπτομένη της  $C_g$  στο σημείο  $(x_0, g(x_0))$  έχει εξίσωση  $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$  και η  $\epsilon$  διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$ , αν και μόνο αν

$$2 - g(x_0) = g'(x_0)(1 - x_0) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ ή } x_0 = 2$$

Βρίσκουμε τις  $\epsilon_1: y = 2x$ ,  $\epsilon_2: y = -2x + 4$

δ. Είναι  $g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ή  $x = 2$ .

Οπότε  $B(2, 0)$ .

Από το διπλανό

σχήμα έχουμε:

• Το εμβαδόν του τριγώνου

AOB είναι

$$E = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AG = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

• Το εμβαδόν του χωρίου που πρικλείεται από την  $C_g$  και τον άξονα  $x$ 's είναι

$$E_1 = \int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \dots = \frac{4}{3}$$

• Το εμβαδόν του χωρίου που πρικλείεται από την  $C_g$  και τις ευθείες AO, AB είναι

$$E_2 = E - E_1 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Ο λόγος των εμβαδών των δύο χωρίων είναι  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{2}{1}$ .

**Θέμα 53**

α. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  ως πολυωνυμική.

Οπότε για να είναι συνεχής στο  $[0, 1]$ , πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Αφού επιπλέον  $f(0) = f(1) = 1$  και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 1)$ , ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Rolle για την  $f$  στο  $[0, 1]$ .

β. Βρίσκουμε  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$

οπότε  $f'(1) = -1$ . Είναι  $f'(1) = \epsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{3\pi}{4}$ .

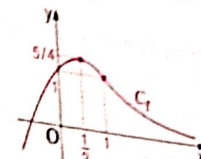
γ. • Είναι:  $f'(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x \leq 1 \\ -e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται η μονοτονία και τα ακρότατα της  $f$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$
$f$		+	-	
$f$			$\frac{1}{4}$	

δ. Βρίσκουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , οπότε η ευθεία  $y = 0$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

Η  $C_f$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

**Θέμα 54**

α. Είναι: •  $f'(x) = \ln x + 2x - 2$ ,  $x > 0$ .

•  $f''(x) = \frac{1}{x} + 2$ ,  $x > 0$

Στο διπλανό πίνακα φαίνεται η μονοτονία της  $f$ .

β. • Είναι  $f \uparrow [1, +\infty)$ , οπότε η  $f$  είναι 1-1 στο  $[1, +\infty)$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f$		+	+
$f$		-	+
$f$			

Οπότε  $f(x) = f(3) \Leftrightarrow x = 3$ , δεκτή.

• Βρίσκουμε  $f((0, 1)) = [1, 3]$  και

$f(3) = 3 \ln 3 + 3 > 3$ . Επειδή  $f(3) \in f((0, 1))$ , η εξίσωση  $f(x) = f(3)$  είναι αδύνατη στο  $(0, 1)$ .

Άρα η εξίσωση  $f(x) = f(3)$  έχει μοναδική λύση την  $x = 3$ .

γ. Από το ερώτημα α. προκύπτει ότι η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το  $f(1) = 1$ , οπότε ισχύει  $f(x) \geq f(1) = 1$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  και το ίσον ισχύει μόνο για  $x = 1$ .

• Έχουμε  $f(1 + f(x)) > \ln 4e \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(1 + f(x)) > f(2) \Leftrightarrow 1 + f(x) > 2$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) > 1 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

δ. Είναι: •  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) - 1) = 0$  και  $f(x) - 1 > 0$ ,

κοντά στο 1, οπότε  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x) - 1} = +\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \dots = 1$ .

Βρίσκουμε ότι το όριο είναι  $+\infty$ .

**Θέμα 55**

α. Τα κοινά σημεία των  $C_f$ ,  $C_g$  έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \ln x - \frac{c}{x} = 0, (1)$ .

Έστω  $h(x) = \ln x - \frac{c}{x}, x > 0$ . Είναι  $h(e) = 0$ .

Είναι  $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} > 0$ , για κάθε  $x > 0$ , οπότε

$h \uparrow (0, +\infty)$ . Άρα η (1)  $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = e$ .

Άρα το κοινό σημείο των  $C_f, C_g$  είναι το  $(e, 1)$ .

Οι  $C_f, C_g$  φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

β. Οι  $C_f, C_g$  έχουν κοινό, μόνο το σημείο  $(e, 1)$  οπότε το εμβαδόν

είναι αυτό του χωρίου που ορίζεται από τις  $C_f, C_g$  και τις ευθείες  $x = e, x = \lambda, \lambda > e$ .

Για  $x \geq e \Leftrightarrow h(x) \geq h(e) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ .

Άρα  $E(\lambda) = \int_e^\lambda g(x) dx - \int_e^\lambda f(x) dx = \dots = (\lambda - e)(\ln \lambda - 1)$ .

γ. Έστω  $F(\lambda) = E(\lambda) - (e^2 - e), \lambda > e$ .

Είναι  $F(e^2) = 0$  και  $F'(\lambda) = h(\lambda), \lambda > e$ .

Για  $\lambda > e \Rightarrow h(\lambda) > h(e) \Rightarrow h(\lambda) > 0$ , οπότε και  $F'(\lambda) > 0$ , για κάθε  $\lambda > e$ , άρα  $F \uparrow (e, +\infty)$ .

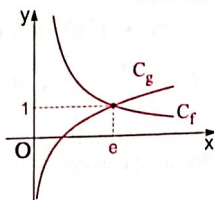
Επομένως  $\lambda = e^2$ .

δ. Είναι  $-1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda - 1 \leq \lambda + \eta\mu\lambda \leq \lambda + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\lambda - 1}{E(\lambda)} \leq \frac{\lambda + \eta\mu\lambda}{E(\lambda)} \leq \frac{\lambda + 1}{E(\lambda)}$ .

Βρίσκουμε  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda - 1}{E(\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda + 1}{E(\lambda)} = 0$ .

Οπότε  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda + \eta\mu\lambda}{E(\lambda)} = 0$ .



**Θέμα 56**

α. Η  $f$  είναι ορισμένη στο σύνολο  $A = (0, +\infty)$ .

Είναι  $f'(x) = \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{x+1}}{\ln^2(1+x)}, x > 0$ .

• Έστω  $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}, x \geq 0$ .

Οπότε  $f'(x) = \frac{g(x)}{\ln^2(1+x)}, x > 0$ .

Είναι  $g'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} > 0$ , για κάθε  $x > 0$  και επειδή

η  $g$  είναι συνεχής στο 0 προκύπτει ότι  $g \uparrow [0, +\infty)$ .

Οπότε για  $x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) = 0$ .

Άρα  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x > 0$ , οπότε  $f \uparrow A$ , δηλαδή η  $f$  είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

• Το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$  είναι το σύνολο τιμών της  $f$ . Επειδή η  $f$  είναι συνεχής και  $f \uparrow A$  έχουμε

$f(A) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1, +\infty)$ ,

αφού:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = \dots = +\infty$ .

β. Για κάθε  $x > 0$  έχουμε:  $f(x) > 1$ , από το ερώτημα α.

$f(x) < 2^{f(x)} - 1 \Leftrightarrow f(x) + 1 < 2^{f(x)} \Leftrightarrow \ln(f(x)+1) < \ln 2^{f(x)} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(f(x)) > f(1)$

$\stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 1$ , που ισχύει.

γ. Για  $x > 0$  είναι  $\dots \Leftrightarrow f(x^2) + \ln \frac{x^2}{x} = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x^2) + \ln x^2 = f(x) + \ln x, (1)$ .

Έστω  $h(x) = f(x) + \ln x, x > 0$ . Βρίσκουμε ότι η  $h$  είναι 1-1.

Άρα η (1)  $\Leftrightarrow h(x^2) = h(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 1$ .

δ. Για κάθε  $x \in [e, e^4]$  έχουμε

$x \leq e^4 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e^4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \sqrt{\ln x} \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{f(\sqrt{\ln x})}{x} \leq \frac{2}{x \ln 3}$ , και το ίσον ισχύει μόνο για  $x = e^4$ .

Οπότε  $\int_e^{e^4} \frac{f(\sqrt{\ln x})}{x} dx < \int_e^{e^4} \frac{2}{x \ln 3} dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_e^{e^4} \frac{f(\sqrt{\ln x})}{x} dx < \frac{2}{\ln 3} [\ln x]_e^{e^4} \Leftrightarrow \dots$ .

**Θέμα 57**

α. Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = (0, +\infty)$ .

Είναι:  $f(1) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \alpha = 1$   
 $f'(1) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \beta = -1$

β. Για  $\alpha = 1$  και  $\beta = -1$ , είναι:

$f(x) = e^{x-1} - \ln x - 1, x > 0$

$f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}, x > 0$ , με  $f'(1) = 0$

$f''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$ ,

$x > 0$ , οπότε  $f' \uparrow (0, +\infty)$  και έχουμε το διπλανό πίνακα.

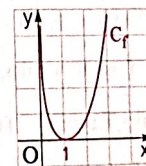
x	0	1	$+\infty$
f'		-	0 +
f			0

ε.λ.

γ. Είναι  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ,  $g(x) \geq 0, x \in [1, 2]$  και αφού η  $g$  είναι συνεχής στο

$[1, 2]$ , έχουμε  $E(\Omega) = \int_1^2 g(x) dx =$

$= \dots = \int_1^2 x(e^{x-1})' dx - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$   
 $= \dots = \frac{4e - 4 \ln 4 - 3}{4}$ .



δ. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την  $f$  στο  $[1, x], x > 1$  και είναι  $f' \uparrow A$ , οπότε

$\dots \Leftrightarrow f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow x > \xi$ , που ισχύει.

**Θέμα 58**

α. Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = (0, +\infty)$ .

Είναι  $f'(x) = \dots = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2} < 0$ , για κάθε

$x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$  και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $e$ , έχουμε  $f \downarrow (0, +\infty)$ .

β. ▶ Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (1 + \ln^2 x) =$

$= (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots = \dots = 0$ .

Βρίσκουμε  $f(A) = (0, +\infty)$ .

▶ Επειδή:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ , η ευθεία  $x = 0$  είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , η ευθεία  $y = 0$  είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

γ. Είναι

$f''(x) = \dots = \frac{2(\ln x - 1)(\ln x - 2)}{x^3}$ ,

$x > 0$  και έχουμε το διπλανό πίνακα.

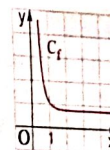
x	0	e	$e^2 + \infty$
lnx-1		-	0 +
lnx-2			- 0 +
f''		+	0 - 0 +
f			

σ.κ. σ.κ.

δ. Έχουμε  $f(x) > 0$ ,

$x \in [e, e^2]$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $[e, e^2]$ , οπότε

$E(\Omega) = \int_e^{e^2} f(x) dx = \dots = \left[ \ln x + \frac{\ln^3 x}{3} \right]_e^{e^2} = \dots = \frac{10}{3}$ .



**Θέμα 59**

α. Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = (0, +\infty)$ . Είναι:

$f'(x) = \dots = \ln x + 1 + \frac{1}{x}, x > 0$

$f''(x) = \dots = \frac{x-1}{x^2}, x > 0$

και έχουμε το διπλανό πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
f''		-	0 +
f'			2

ε.λ.

Οπότε  $f'(x) \geq f'(1) = 2 > 0$ , για κάθε  $x > 0$ , άρα  $f \uparrow A$ . Βρίσκουμε  $f(A) = \mathbb{R}$ .

β. Για  $x > 0$  είναι  $x^{2019} = e^{2019 \ln x} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) = 2019, (1)$ . Επειδή  $2019 \in f(A)$  και  $f \uparrow A$ , η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση.

γ. Το σημείο καμπής είναι το  $A(1, 0)$ . Βρίσκουμε  $\epsilon: y = 2x - 2$ .

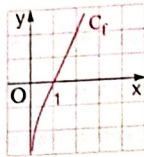
δ. Για  $x > 1$  είναι

$$\frac{x+1}{x-1} > \frac{2}{\ln x} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) > 2x-2.$$

Από το ερώτημα α., έχουμε ότι η f είναι κυρτή στο  $[1, +\infty)$  και από το ερώτημα γ. την εφαπτομένη

$$ε: y = 2x - 2 \text{ της } C_f \text{ στο } x_0 = 1.$$

Οπότε  $f(x) \geq 2x - 2$ , για κάθε  $x \geq 1$  και το "=" ισχύει μόνο για  $x = 1$ . Επομένως  $f(x) > 2x - 2$ , για κάθε  $x > 1$ .



ε. Για  $x > 0$  είναι

$$\dots \Leftrightarrow e^x - x > \frac{2+x^2}{2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 > 0.$$

$$\text{Έστω } g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

Είναι  $g'(x) = e^x - x - 1 > 0, x \in (0, +\infty)$ , οπότε  $g \uparrow [0, +\infty)$ , αφού η g είναι συνεχής. Τότε

$$x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 > 0.$$

**Θέμα 60**

α. Η f έχει πεδίο ορισμού το  $A = \mathbb{R}$ .

Είναι  $f'(x) = e^x - 1$  και έχουμε το διπλανό πίνακα.

$$\bullet f''(x) = e^x > 0, x \in A$$

Άρα η f είναι κυρτή.

β. Αν  $\Delta_1 = (-\infty, 0]$  και  $\Delta_2 = (0, +\infty)$ , βρίσκουμε  $f(\Delta_1) = [-1, +\infty)$  και  $f(\Delta_2) = (-1, +\infty)$ , αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right) = \dots = +\infty \text{ οπότε}$$

$f(A) = [-1, +\infty)$ . Επειδή  $0 \in f(\Delta_1)$ ,  $0 \in f(\Delta_2)$  και η f είναι γνησίως μονότονη στα  $\Delta_1, \Delta_2$ , η f έχει, ακριβώς, μία ρίζα σε καθένα από τα  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$  που καμία δεν είναι 0. Άρα η f έχει, ακριβώς, δύο ρίζες ετερόσημες.

γ. Είναι:  $\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x - 2}{x} = \dots = -1$

$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2) = -2$

Άρα η ευθεία  $y = -x - 2$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .

δ. Έστω  $g(x) = f(x) + \eta\mu x = e^x - x - 2 + \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ .

Είναι  $g'(x) = f'(x) + \sigma\upsilon\nu x > 0$ , για κάθε  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$+\infty$	-1	$+\infty$

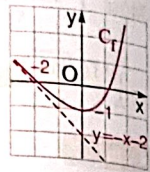
οπότε  $g \uparrow (0, \frac{\pi}{2})$ . Για τη g ισχύουν οι υποθέσεις του

Θ. Bolzano στο  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Είναι  $g(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} - 2 + 1 =$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} - 1 > 0, \text{ αφού ισχύει}$$

$$f(x) \geq -1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \text{ και το} \\ \text{"=" ισχύει μόνο για } x = 0, \text{ οπότε}$$

$$\text{για } x = \frac{\pi}{2} \text{ είναι } e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} - 1 > 0.$$



**Θέμα 61**

α. Η f έχει πεδίο ορισμού το  $A = (0, +\infty)$ . Είναι:

$$\bullet f'(x) = \dots = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$x > 0$  και έχουμε το διπλανό πίνακα.

x	0	e	$+\infty$
f'		+	0
f	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

$$\bullet f''(x) = \dots = \frac{2 \ln x - 3}{x^3},$$

$x > 0$  και έχουμε το διπλανό πίνακα.

x	0	$e\sqrt{e}$	$+\infty$
f''		-	0
f		$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	

β. Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 1 \text{ και } f(x) \geq 0, x \in [1, 2].$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι συνεχής στο  $[1, 2]$ , έχουμε

$$E = \int_1^2 f(x) dx = \dots = \int_1^2 (\ln x)(\ln x)' dx = \dots = \frac{\ln^2 2}{2}.$$

γ. Έστω  $\Delta_1 = (0, e]$ ,  $\Delta_2 = (e, +\infty)$ . Βρίσκουμε ότι

$$f(\Delta_1) = (-\infty, \frac{1}{e}] \text{ και } f(\Delta_2) = (0, \frac{1}{e}). \text{ Οπότε}$$

$$f(A) = (-\infty, \frac{1}{e}]. \text{ Επειδή } \frac{1}{3} \in f(\Delta_1), \frac{1}{3} \in f(\Delta_2) \text{ και}$$

η f είναι γνησίως μονότονη στα  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$ , έχουμε

ότι η εξίσωση  $f(x) = \frac{1}{3}$  έχει, ακριβώς, μία ρίζα σε

κάθε ένα από τα  $\Delta_1, \Delta_2$ , που είναι θετικές και καμία

δεν είναι το e, αφού  $f(e) \neq \frac{1}{3}$ . Άρα η εξίσωση

$f(x) = 0$  έχει, ακριβώς, δύο θετικές ρίζες.

δ. Είναι  $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{3}$  με  $x_1 \in (0, e)$  και

$x_2 \in (e, +\infty)$ . Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για τη

$$g(x) = x(3f(x) - 1), x > 0 \text{ στο } [x_1, x_2]$$

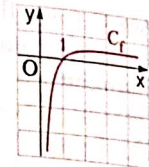
ή Θ. Bolzano για την  $g(x) = 3f(x) + 3f'(x) - 1$  στο  $[x_1, x_2]$ .

ε. Για  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\dots \Leftrightarrow \frac{\ln(\eta\mu x)}{\eta\mu x} > \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow f(\eta\mu x) > f(\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$$

$$f_{\uparrow(0, \frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow \eta\mu x > \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \epsilon\phi x > 1$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \epsilon\phi f(0, \frac{\pi}{2}) \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$



**Θέμα 62**

α. Το πεδίο ορισμού της f είναι το  $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ .

$$\text{Είναι } f'(x) = \dots = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}, x \in A \text{ και}$$

έχουμε το διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'	+		+	0	-
f					

β. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $x^2 + 1 \geq 1$  και  $x^4 + 1 \geq 1$ , όπου το "=" ισχύει, μόνο, για  $x = 0$ . Οπότε η ανίσωση ορίζεται για  $x \neq 0$ .

Επειδή  $f \downarrow (1, +\infty)$  έχουμε

$$f(x^2 + 1) < f(x^4 + 1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^4 - x^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1).$$

γ. Το πρόσημο της f φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f(x)	+		-	+

Επειδή η f είναι συνεχής στο  $[2, 3]$  και  $f(x) > 0$ ,

$$x \in [2, 3], \text{ έχουμε } E(\Omega) = \int_2^3 f(x) dx =$$

$$= \int_2^3 \frac{2}{x^2-1} dx = \dots = \int_2^3 \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \dots = \ln \frac{3}{2}.$$

δ. Για x κοντά στο  $+\infty$ , έχουμε

$$|f(x)\eta\mu x| = |f(x)| |\eta\mu x| \leq |f(x)| = f(x), \text{ αφού}$$

$$f(x) > 0, \text{ κοντά στο } +\infty.$$

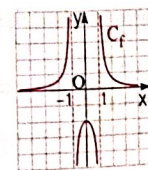
Οπότε  $-f(x) \leq f(x)\eta\mu x \leq f(x)$ , κοντά στο  $+\infty$ .

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)), \text{ οπότε σύμφωνα}$$

με το κριτήριο παρεμβολής και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)\eta\mu x) = 0.$$



**Θέμα 63**

α. Η f είναι ορισμένη στο  $A = (0, +\infty)$ . Για κάθε  $x \in A$ , έχουμε  $f(x) \geq e^x \Leftrightarrow f(x) \geq f(1)$ .

Οπότε για  $x = 1$  η f παρουσιάζει ελάχιστο.

$$\text{Είναι } f'(x) = \dots = \frac{x-a}{x} e^{\frac{x}{a}}, x \in A.$$

Σύμφωνα με το Θ. Fermat θα είναι

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow (1-a)e^a = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

β. Για  $a = 1$  είναι  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$  και

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}, x > 0.$$

Αν  $\Delta_1 = (0, 1]$  και

$\Delta_2 = (1, +\infty)$ , βρίσκουμε

$$f(\Delta_1) = [e, +\infty),$$

$$f(\Delta_2) = (e, +\infty), \text{ οπότε } f(A) = [e, +\infty).$$

γ. Είναι:  $\bullet \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}}}{x} = \dots = 1$

$\bullet \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}) = \dots = 1$

Άρα η ευθεία  $y = x + 1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

δ. Επειδή η g είναι συνεχής στο  $[1, 2]$  και  $g(x) > 0, x \in [1, 2]$ , έχουμε

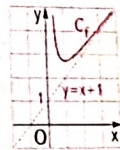
$$E(\Omega) = \int_1^2 g(x) dx = \dots = \left[ -e^{-\frac{1}{x}} \right]_1^2 = \dots = e - \sqrt{e}.$$

ε. Για  $x > 0$  είναι

$$f(x) \geq e \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \geq \frac{e}{x} \text{ και το}$$

"=" ισχύει μόνο για  $x = 1$ , οπότε

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx > \int_1^2 \frac{e}{x} dx \Leftrightarrow \dots$$



**Θέμα 64**

α. Είναι  $f'(x) = \dots = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}, x > 0.$

Έστω  $h(x) = x^2 - 1 + \ln x, x > 0$ . Είναι  $h(1) = 0$  και

$$h'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0, x > 0,$$

οπότε  $h \uparrow (0, +\infty)$  και

βρίσκουμε το διπλανό πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
f'		-	0
f			

β. Επειδή  $e^x + 1 > 1$ ,  $x^2 + 2 \geq 2 > 1$  και  $f \uparrow [1, +\infty)$

είναι  $\dots \Leftrightarrow e^x + 1 = x^2 + 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2 + 1} = 1$ , (1).

Έστω  $\varphi(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ . Είναι  $\varphi'(x) = \dots = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0$ ,

$x \neq 1$  και η  $\varphi$  είναι συνεχής στο 1, οπότε  $\varphi \uparrow \mathbb{R}$ , άρα και 1-1. Τότε (1)  $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 0$ .

γ. Η ευθεία  $y = x$  είναι η πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ . Έστω  $\varphi_1(x) = f(x) - x = -\frac{\ln x}{x} \leq 0$ ,

για κάθε  $x \in [1, 2]$ . Αφού, επιπλέον, η συνάρτηση  $\varphi_1$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$ , έχουμε

$$E(\Omega) = -\int_1^2 \varphi_1(x) dx = \dots = \frac{\ln^2 2}{2}$$

δ. Το πεδίο ορισμού της  $g$  αποτελείται από εκείνα τα  $x$ , για τα οποία ισχύει  $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$  και είναι το  $B = (-1, 1)$ .

Το πεδίο ορισμού της  $f \circ g$  είναι το

$B' = \{x \in B / g(x) \in A\}$ . Για  $x \in (-1, 1)$  έχουμε

$$g(x) \in A \Leftrightarrow f(1-x^2) - 1 > 0 \Leftrightarrow f(1-x^2) > 1, (1)$$

Από το ερώτημα α., έχουμε  $f(x) \geq 1$ , για κάθε  $x > 0$  και το "=" ισχύει μόνο για  $x = 1$ .

Οπότε η (1)  $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 1 - x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ .

Άρα  $B' = (-1, 0) \cup (0, 1)$ .

**Θέμα 65**

α. Η  $f$  είναι συνεχής στα  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$ , για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ . Επιπλέον, πρέπει να είναι συνεχής και στο 0. Πρέπει  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow e^{a-1} - \ln a - 1 = 0, (1)$$

Έστω  $g(x) = e^{x-1} - \ln x - 1$ ,  $x > 0$ .

Είναι  $g'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$  με  $g'(1) = 0$  και

$$g''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0, x > 0. \text{ Άρα } g' \uparrow (0, +\infty).$$

Από το διπλανό πίνακα, έχουμε ότι

$$\eta (1) \Leftrightarrow g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

β. Για  $\alpha = 1$  είναι

x	0	1	$+\infty$
g'	-	0	+
g		↘ 0 ↗	

ελ.

$$f'(x) = \begin{cases} e^x(x+1), & x < 0 \\ \frac{1}{(x+1)^2}, & x > 0 \end{cases}$$

Είναι: •  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ , για  $x < 0$

•  $f'(x) > 0$ , για  $x > 0$

Άρα  $f \downarrow (-\infty, -1]$  και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο 0, έχουμε  $f \uparrow [-1, +\infty)$ .

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f'	-	0	+	+
f		↘ ↗		

ελ.

γ. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση  $y = x + 1$ .

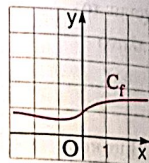
δ. Είναι: •  $f(x) = xe^x + 1$ ,  $x \in [-1, 0]$

$$\bullet f(x) = \frac{x}{x+1} + 1, x \in (0, 1]$$

Από το ερώτημα β., έχουμε

$$f(x) \geq f(-1) = \frac{e-1}{e} > 0, \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$  και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1, 1]$  το εμβαδόν είναι



$$E = \int_{-1}^0 (xe^x + 1) dx + \int_0^1 \left(\frac{x}{x+1} + 1\right) dx =$$

$$= \dots = \int_{-1}^0 x(e^x)' dx + [x]_{-1}^0 + \int_0^1 \left(\frac{x+1-1}{x+1} + 1\right) dx$$

$$= \dots = \frac{2}{e} + 2 - \ln 2.$$

**Θέμα 66**

α. Είναι: •  $f'(x) = \frac{x^2 + x \sin x - \eta \mu x}{x^2}$ ,  $x > 0$

Έστω  $g(x) = x^2 + x \sin x - \eta \mu x$ ,  $x \geq 0$ .

Βρίσκουμε  $g(x) > 0$ , για κάθε  $x > 0$ .

$$\bullet D_{r^{-1}} = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1, +\infty),$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots = +\infty$ .

β. Τα κοινά σημεία των  $C_f$ ,  $C_{r^{-1}}$  έχουν

συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ f(x) + x = f(y) + y \end{cases}, (2)$$

$$(1)$$

Έστω  $h(x) = f(x) + x$ ,  $x > 0$ . Βρίσκουμε ότι η  $h$  είναι 1-1. Οπότε η (1)  $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Άρα τα κοινά σημεία είναι τα  $(k\pi, k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ .

γ. Για  $x > 0$  είναι

$$\dots \Leftrightarrow f(x^2) + \ln x^2 = f(x) + \ln x, (3)$$

Έστω  $\varphi(x) = f(x) + \ln x$ ,  $x > 0$ . Βρίσκουμε ότι η  $\varphi$  είναι 1-1. Οπότε η (3)  $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x = 1$ .

δ. Για κάθε  $x > 0$  έχουμε  $\eta \mu x < x \Leftrightarrow \frac{\eta \mu x}{x} < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x + \frac{\eta \mu x}{x} < x + 1 \Rightarrow f(x) < x + 1, (1)$$

Αποδεικνύουμε ότι  $f^{-1} \uparrow D_{r^{-1}}$ , οπότε

$$\eta (1) \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(x+1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f^{-1}(y) > y-1, y > 1.$$

**Θέμα 67**

α. Είναι: •  $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ ,  $x > 0$

$$\bullet f''(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}, x > 0.$$

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται η μονοτονία, τα ακρότατα η κυρτότητα και τα

x	0	1	e	$+\infty$
f''		+	+	0
f'		-	0	+
f		↘ ↗	↘ ↗	

ελ. σ.κ.

σημεία καμπής της  $f$ .

β. Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ , οπότε η  $C_f$  έχει

κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία  $x = 0$ .

Βρίσκουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,

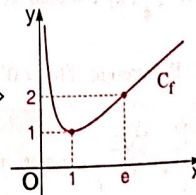
οπότε η  $C_f$  δεν έχει ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .

Η  $C_f$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

$$\gamma. \text{ Είναι } e f'(f(x) + e - 1) = 2 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow f'(f(x) + e - 1) = f'(e), (1)$$

Βρίσκουμε ότι

$f(x) - 1 + e \geq e$ , για κάθε  $x > 0$  και η  $f'$  είναι 1-1 στο  $[e, +\infty)$ .



Άρα η (1)  $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ , αφού  $f(x) \geq 1$ , για κάθε  $x > 0$  και το ίσον ισχύει μόνο για  $x = 1$ .

δ. Είναι  $\dots \Leftrightarrow f(f(x)) < f\left(\frac{2}{e}x\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) < \frac{2}{e}x, (2), \text{ για κάθε } x > e.$$

Βρίσκουμε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $x_0 = e$  είναι η  $y = \frac{2}{e}x$  και αφού η  $f$  είναι κυρτή, η (2) ισχύει για κάθε  $x > e$ .

**Θέμα 68**

α. • Η  $f$  είναι ορισμένη στο σύνολο  $A = \mathbb{R} - \{1\}$  και είναι συνεχής στα σύνολα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ , διότι εφαρμόζεται από συνεχείς συναρτήσεις.

Επιπλέον βρίσκουμε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ , οπότε η  $f$  είναι συνεχής και στο 0.

Άρα η  $f$  είναι συνεχής.

• Βρίσκουμε  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ ,

οπότε η ευθεία  $x = 1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

β. • Αν  $x < 0$ , τότε  $f'(x) = 2x < 0$ , για κάθε  $x < 0$ .

• Αν  $0 < x \neq 1$ , τότε  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$  και

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = e.$$

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται το πρόσημο της  $f'$ , η μονοτονία και τα ακρότατα της  $f$ .

γ. Έχουμε  $f(x) \geq f(e) = e$ , για κάθε  $x > 1$ .

Είναι  $e^{f(x)} = (f(x))^e \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} = \ln (f(x))^e \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(f(x)) = f(e), (1)$$

Επειδή  $f(x), e \in [e, +\infty)$ , για κάθε  $x > 1$  και  $f \uparrow [e, +\infty)$ , δηλαδή η  $f$  είναι 1-1, στο  $[e, +\infty)$ , η (1)  $\Leftrightarrow f(x) = e \Leftrightarrow x = e$ , αφού  $f(x) \geq e$ , για κάθε  $x > 1$  και το ίσον ισχύει μόνο για  $x = e$ .

x	$-\infty$	0	1	e	$+\infty$
f'	-	-	-	0	+
f			↘ ↗	↘ ↗	

π.ε.

δ. Για κάθε  $x \in [e, e^2]$ , είναι  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ , οπότε

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln \frac{1}{x}} = -\frac{1}{x \ln x}, \quad x \in [e, e^2].$$

$$\text{Άρα } \int_e^{e^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_e^{e^2} \left(-\frac{1}{x \ln x}\right) dx = \dots = [-\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \dots = -\ln 2.$$

**Θέμα 69**

α. Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει  $xf'(x) + f(x) - f(x)f'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, (1)$

• Είναι  $g'(x) = 2(f(x)f'(x) - f(x) - xf'(x)) = 0,$

$x \in \mathbb{R}$ , οπότε η  $g$  είναι σταθερή.

• Βρίσκουμε  $g(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$

• Οπότε  $g(x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}, (1).$$

Θέτουμε  $h(x) = f(x) - x, \quad x \in \mathbb{R}$ , οπότε

$$\eta (1) \Leftrightarrow h^2(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow |h(x)| = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}, (2).$$

Επειδή  $\sqrt{x^2 + 1} \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$ , από τη (2), έχουμε ότι και  $h(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$  και αφού η  $g$  είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο. Επιπλέον είναι  $h(0) = 1 > 0$ , οπότε

$$h(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Άρα } \eta (2) \Leftrightarrow h(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β. Είναι: •  $f'(x) = \dots = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \quad x \in \mathbb{R},$

αφού  $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2} = |x| \geq -x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Οπότε  $f \uparrow \mathbb{R}.$

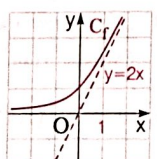
•  $f''(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} > 0,$  για

κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε η  $f$  είναι κυρτή.

γ. Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \dots = 0,$

οπότε η ευθεία  $y = 0$  είναι η οριζόντια ασύμπτωτη

της  $C_f$  στο  $-\infty$ . Επίσης



$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} \right) = 0,$$

οπότε η ευθεία  $y = 2x$  είναι η πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

δ. • Έχουμε  $f' \uparrow \mathbb{R}.$

Για κάθε  $x > 0$  βρίσκουμε  $f'(2x) > f'(x).$

• Αποδεικνύουμε ότι  $f(x) > 2x$ , για κάθε  $x > 0.$

**Θέμα 70**

α. Έστω  $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} - \sin x, \quad x \in [0, \pi].$

$$\text{Είναι } g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} + \eta \mu x = \dots = 0.$$

Οπότε η  $g$  είναι σταθερή στο  $[0, \pi].$

Άρα  $g(x) = c$  και βρίσκουμε  $c = 0.$

β. Είναι  $f'(x) = e^x(\sin x - \eta \mu x), \quad x \in [0, \pi].$

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται η μονοτονία και τα ακρότατα της  $f.$

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\pi$	
$f'$		+	0	-
$f$		$e^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-e^{\pi}$	
	τ.ε.	μεγ.	ελ.	

γ. Είναι  $f(x) \geq 0,$

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ οπότε}$$

$$E(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \dots = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - E(\Omega).$$

$$\text{Βρίσκουμε } E(\Omega) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}.$$

δ. • Αν  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ , βρίσκουμε ότι η  $f$  είναι 1-1

στο  $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ , οπότε  $f(x) = f(e) \Leftrightarrow x = e.$

• Βρίσκουμε  $f(e) < 0$  και  $f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) =$

$$\left[1, e^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ οπότε η εξίσωση } f(x) = f(e), \text{ είναι}$$

αδύνατη στο  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right].$  Άρα  $x = e.$

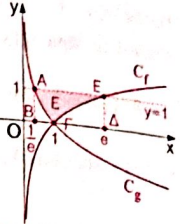
**Θέμα 71**

α.  $E = (AB\Delta E) - (AB\Gamma) - (\Gamma\Delta E) =$

$$= BD \cdot BA - \int_{\frac{1}{e}}^1 g(x) dx - \int_1^e f(x) dx$$

$$= \left(e - \frac{1}{e}\right) \cdot 1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx - \int_1^e \ln x dx$$

$$= \dots = \frac{(e-1)^2}{e}.$$



β. Βρίσκουμε  $D_h = (0, 1)$  και  $h(x) = \ln(-\ln x).$

γ. • Είναι:  $h'(x) = \frac{1}{x \ln x} < 0,$  για κάθε  $x \in (0, 1)$

οπότε  $h \downarrow (0, 1).$

• Είναι:  $h''(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}, \quad x \in (0, 1)$  και

βρίσκουμε ότι η  $h$  παρουσιάζει καμπή στο  $\frac{1}{e}.$

δ. Για  $x \in (0, 1)$  είναι  $\dots \Leftrightarrow -\ln x < e^{1-x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow h(x) < -ex + 1, (1).$$

Βρίσκουμε ότι η εφαπτομένη της  $C_h$  στο  $x_0 = \frac{1}{e}$

είναι η ευθεία  $y = -ex + 1.$

Η (1) ισχύει, όταν η  $h$  είναι κοίλη, δηλαδή στο  $\left(\frac{1}{e}, 1\right).$

ε. Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot f(x+1)) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x \cdot \ln(x+1)) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \ln x \cdot \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = \dots = 0 \cdot 1 = 0.$$

**Θέμα 72**

α. Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = [0, +\infty).$

► Βρίσκουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots = f(0).$  Οπότε η  $f$  είναι συνεχής στο 0.

► Είναι: •  $f'(x) = \dots = e^{x-1} - \ln x - 1, \quad x > 0, \quad f'(1) = 0$

•  $f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}, \quad x > 0, \quad f''(1) = 0$

•  $f^{(3)}(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0, \quad x > 0,$

οπότε  $f'' \uparrow (0, +\infty)$  και έχουμε το διπλανό πίνακα.

Οπότε  $f'(x) > 0,$  για κάθε  $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$  και

$x$	0	1	$+\infty$	
$f''$		-	0	+
$f'$			0	

αφού η  $f$  είναι συνεχής στο 0 και στο 1, έχουμε  $f \uparrow [0, +\infty).$

Άρα η  $f$  είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

► Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} \left(1 - \frac{x \ln x}{e^{x-1}}\right) = \dots = (+\infty)(1-0) = +\infty.$

Βρίσκουμε  $f(A) = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right).$

β. Για κάθε  $x \in \mathbb{R},$  έχουμε

$$\dots \Leftrightarrow f(x^2 + 1) > f(1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \neq 0.$$

γ. Η  $C_f$  έχει σημείο καμπής το  $A(1, 1).$  Επειδή  $f'(1) = 0,$  η ευθεία  $y = 1$  εφαπτεται της  $C_f$  στο  $A.$

$$\text{Είναι } \dots \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{f(f(x)) - 1}{f(x) - 1} - \frac{f(x) - 1}{x - 1} \cdot (x - 1) \ln(x - 1) \right] =$$

$$= \dots = 0 \cdot 0 = 0, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(f(x)) - 1}{f(x) - 1} = \dots = f'(1) = \dots = 0$$

δ. Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $x_0$  έχει εξίσωση  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$  και διέρχεται από το

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right), \text{ όταν } \frac{1}{2} - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 2x_0 f'(x_0) - 2f(x_0) + 1 = 0. \text{ Έστω}$$

$$g(x) = 2x f'(x) - 2f(x) + 1, \quad x > 0.$$

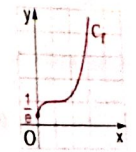
Είναι  $g'(x) = \dots = 2xf''(x) < 0,$

για  $x \in (0, 1)$ , οπότε  $g \downarrow (0, 1).$

Βρίσκουμε ότι

$$g\left(0, 1\right) = \left(-1, \frac{e-2}{e}\right), \text{ οπότε}$$

$$0 \in g\left(0, 1\right).$$



**Θέμα 73**

α. Η  $f$  είναι συνεχής στα  $(-\infty, 0), (0, +\infty).$  για κάθε  $\theta \in \mathbb{R}.$  Επιπλέον, η  $f$  πρέπει να είναι συνεχής και στο 0. Άρα  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \eta \mu \theta = \theta \Leftrightarrow \theta = 0. \text{ Άρα } \theta = 0.$$

β. Για  $\theta = 0$  είναι  $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ x \ln x, & x > 0 \end{cases}$

$$\text{Είναι } f(-1) = f(e^{-1}) = -\frac{1}{e}.$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1, e^{-1}]$ , (αφού  $\theta=0$ ), παραγωγίσιμη στα  $(-1, 0)$ ,  $(0, e^{-1})$ .

Όμως  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x} = \dots = -\infty$ .

Οπότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Άρα δεν ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Θ. Rolle για την  $f$  στο  $[-1, e^{-1}]$ .

γ. Είναι  $f'(x) = \begin{cases} (x+1)e^x, & x < 0 \\ 1 + \ln x, & x > 0 \end{cases}$  και έχουμε το

παρακάτω πίνακα,

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$	
f'	-	0	+	-	0	+
f	0	$-\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$	

ε.λ.      τ.μ.      ε.λ.

δ. Πρέπει  $1 + ef(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq -\frac{1}{e}$ , (1).

Από το ερώτημα γ., είναι  $f(x) \geq -\frac{1}{e}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και το

"=" ισχύει, μόνο για  $x = -1$ ,  $x = \frac{1}{e}$ . Άρα

η (1)  $\Leftrightarrow x \neq -1$  ή  $x \neq \frac{1}{e}$ .

Επομένως το πεδίο ορισμού της  $g$  είναι το

$B = \mathbb{R} - \{-1, \frac{1}{e}\}$ .

ε. Αν  $x \geq \frac{1}{e}$  τότε βρίσκουμε ότι η  $f$  είναι 1-1 στο

$[\frac{1}{e}, +\infty)$ , οπότε  $f(x) = f(\pi) \Leftrightarrow x = \pi$ .

• Αν  $x \in (-\infty, \frac{1}{e})$ , τότε βρίσκουμε ότι

$-\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 0$  και  $f(\pi) = \pi \ln \pi > 0$ , οπότε η εξίσωση

$f(x) = f(\pi)$  είναι αδύνατη στο  $(-\infty, \frac{1}{e})$ .

Άρα  $x = \pi$ .

**Θέμα 74**

α. Είναι  $f'(x) = \frac{e^{2x}(e^x+2)}{(e^x+1)^2} > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,

οπότε  $f \uparrow \mathbb{R}$ , άρα η  $f$  είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται. Βρίσκουμε  $D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$ .

β. Έστω  $g(x) = f(x) + f^{-1}(\frac{e^x}{2}) - \frac{1}{2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Βρίσκουμε  $f^{-1} \uparrow (0, +\infty)$  και  $g \uparrow \mathbb{R}$ , οπότε η  $g$  είναι 1-1, άρα  $g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(0) \Leftrightarrow x = 0$ ,

αφού  $f(0) = \frac{1}{2}$  και  $f^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$ .

γ. Για κάθε  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  είναι  $\dots \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow e^{\pi x} - x > 0$ .

Έστω  $h(x) = e^{\pi x} - x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ .

Βρίσκουμε  $h \uparrow [0, \frac{\pi}{2})$  οπότε για

$x > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow e^{\pi x} - x > 0$ .

δ. Έστω  $h(x) = f(x) - \frac{1}{2} = f(x) - f(0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Βρίσκουμε το διπλανό πίνακα, οπότε

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h	-	0	+

$E = -\int_{-1}^0 h(x) dx = \dots = \frac{1}{2} - \int_{-1}^0 \frac{(e^x)^2}{e^x+1} dx$ .

Για το  $\int_{-1}^0 \frac{(e^x)^2}{e^x+1} dx$  θέτουμε  $u = e^x$  και είναι

$\int_{-1}^0 \frac{(e^x)^2}{e^x+1} dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{u}{u+1} du = \int_{\frac{1}{e}}^1 (1 - \frac{1}{u+1}) du =$

$= \dots = \ln(1+e) - \ln 2 - \frac{1}{e}$ .

Βρίσκουμε  $E = \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{e} - \ln(1+e)$ .

**Θέμα 75**

α. Είναι  $f'(x) = \ln x$ ,  $x > 0$ .

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται η μονοτονία και τα ακρότατα της  $f$ .

x	0	1	$+\infty$
f	-	0	+
f		$\frac{1}{e}$	

ε.λ.

β. Για  $x > 1$  βρίσκουμε

$0 < \frac{1}{x} < 1$ .

Είναι  $f((0, 1)) = (\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)) = (1, 2)$ .

αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \dots = 0$ .

Οπότε  $1 < f(x) < 2$ , για κάθε  $x \in (0, 1)$  και θέτουμε όπου  $x$  το  $\frac{1}{x}$ , για  $x > 1$ .

γ. Για  $x \geq 0$  είναι  $e^x, 3 \in [1, +\infty)$  και βρίσκουμε ότι η  $f$  είναι 1-1 στο  $[1, +\infty)$ .

Οπότε  $\dots \Leftrightarrow x = \ln 3$ .

Για  $x < 0$  είναι  $e^x < 1$ , οπότε  $1 < f(e^x) < 2$ .

Επιπλέον,  $f(3) = 3 \ln 3 - 1 > 2$ .

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο  $(-\infty, 0)$ .

δ. Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $(x_0, f(x_0))$  είναι

$\varepsilon: y = \ln x_0 \cdot x - x_0 + 2$  και διέρχεται από το  $A(0, 2-e)$  αν και μόνο αν

$2-e = \ln x_0 \cdot 0 - x_0 + 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_0 = e$ .

Βρίσκουμε  $\varepsilon: y = x - e + 2$ .

**Θέμα 76**

α. Βρίσκουμε  $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$ .

Είναι  $f(4) = f(16) = \ln 2$ .

β. Αρκεί να δείξουμε  $\dots \Leftrightarrow e \ln x \leq 2\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) \leq f(e^2)$ , για κάθε  $x > 0$ , (1).

Βρίσκουμε το διπλανό πίνακα.

x	0	$e^2$	$+\infty$	
f'		+	0	-
f		$f(e^2)$		

μεγ.

γ. Για κάθε  $x > 0$ , έχουμε:

$2\sqrt{x} = x \Leftrightarrow \ln 2\sqrt{x} = \ln x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) = f(4)$ , (1)

• Αν  $0 < x < e^2$ , τότε η (1)  $\Leftrightarrow x = 4$ .

• Αν  $x \geq e^2$ , τότε

η (1)  $\Leftrightarrow f(x) = f(16) \Leftrightarrow x = 16$ .

δ. Είναι  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 1$ .

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, e^2]$  και  $f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in [1, e^2]$ , έχουμε:

$E = \int_1^{e^2} f(x) dx = \dots = 2 \int_1^{e^2} (\sqrt{x})' \ln x dx = \dots = 4$ .

**Θέμα 77**

α. Είναι: •  $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} + 1 > 0$ , για κάθε

$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , οπότε  $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

•  $f'(x) = \frac{2 \operatorname{erfc} x}{\sin^2 x}$ ,  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της  $f$ .

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
f'	-	0	+
f		0	

β. Βρίσκουμε

$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ , οπότε οι

ευθείες  $x = -\frac{\pi}{2}$  και  $x = \frac{\pi}{2}$

είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της  $C_f$ .

Η  $C_f$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

γ. • Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $x_0 = 0$  είναι η ευθεία  $y = 2x$ .

• Η συνάρτηση  $\frac{\ln x}{f(x) - 2x}$ , ορίζεται για  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{f(x) - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{f(x) - 2x} \cdot \ln x \right) =$

$= (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - 2x) = 0$  και  $f(x) > 2x$ , κοντά στο 0'.

δ. Επειδή η  $f$  είναι κυρτή στο  $(0, \frac{\pi}{2})$  και κοίλη στο

$(-\frac{\pi}{2}, 0]$ , η  $C_f$  έχει κοινό σημείο με την  $y = 2x$

μόνο το σημείο επαφής.

Το χωρίο είναι αυτό που περικλείεται από την  $C_f$ , την ευθεία  $y = 2x$  και τις ευθείες

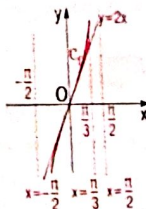
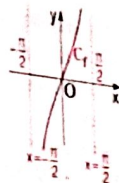
$x = 0$  και  $x = \frac{\pi}{3}$  και είναι

$f(x) \geq 2x$ , για κάθε

$x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ .

Άρα  $E = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x dx$

$= \dots = [-\ln(\sin x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - [x^2]_0^{\frac{\pi}{3}} = \dots = \ln 2 - \frac{\pi^2}{18}$ .



**Θέμα 76**

α. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$ , ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Εκπαιδών

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0 \cdot 0 = 0 = f(0), \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \dots = 0.$$

Αρα η  $f$  είναι συνεχής.

β. Είναι  $f'(x) = \ln x \cdot (\ln x + 2)$ ,  $x > 0$  και

$$f''(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), x > 0.$$

Στους διατεταμένους πίνακες φαίνονται η μονοτονία, τα ακρότητα, η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της  $f$ .

$x$	0	$e^{-1}$	1	$+\infty$
$f$	+	0	-	+
$f'$	0	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	ε.λ.	μ.	ε.λ.	

$x$	0	$e^{-1}$	$+\infty$
$f$	-	0	+
$f'$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	ε.λ.	μ.	ε.λ.

γ. Για  $x > 0$  έχουμε την εξίσωση

$$\ln^2 x = \frac{\alpha^2}{x} \Leftrightarrow f(x) = \alpha^2, (1)$$

Επειδή η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στα  $\Delta_1 = [0, e^{-1}]$ ,

$\Delta_2 = (e^{-1}, 1)$  και  $\Delta_3 = [1, +\infty)$ , η εξίσωση (1) θα έχει ακριβώς τρεις ρίζες, όταν  $\alpha^2 \in f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3)$ . Βρίσκουμε ότι  $\alpha \in (-\frac{2}{e}, 0) \cup (0, \frac{2}{e})$ .

δ. Είναι  $f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in [1, e]$ , και η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, e]$ . Οπότε

$$E = \int_1^e f(x) dx = \dots = \frac{e^2}{2} - \int_1^e x \ln x dx = \dots = \frac{e^2 - 1}{4}.$$

**Θέμα 79**

α. Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = \mathbb{R}$ , αφού για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$ , οπότε  $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

• Είναι  $f(-x) = \dots = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = \dots = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dots = -f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Αρα η  $f$  είναι περιττή.

β. Είναι: •  $f'(x) = \dots = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$

•  $f''(x) = \dots = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Βρίσκουμε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $(-\infty, 0]$  και κοίλη στο  $[0, +\infty)$ .

γ. Έστω  $I = \int_{-n}^n f(x) dx$ .

Είναι  $I = \dots = \int_{-n}^n -f(x) dx = \int_{-n}^n f(-x) dx$ , (1).

Θέτουμε  $u = -x$ , οπότε  $\dots = \int_{-n}^n f(-x) dx = \dots = -I$ .

Τότε (1)  $\Leftrightarrow I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$ .

δ. Είναι  $f(x) = x + f(2x) \Leftrightarrow f(x) + x = f(2x) + 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , (1).

Έστω  $g(x) = f(x) + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Είναι  $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε  $g \uparrow \mathbb{R}$  άρα και  $1-1$ .

$H(1) \Leftrightarrow g(x) = g(2x) \Leftrightarrow$

$\dots \Leftrightarrow x = 2x \Leftrightarrow x = 0$ .

ε. Για  $x > 0$  είναι

$\dots \Leftrightarrow \eta\mu x + \frac{1}{6}x^3 > x \Leftrightarrow \eta\mu x + \frac{1}{6}x^3 - x > 0$ .

Έστω  $h(x) = \eta\mu x + \frac{1}{6}x^3 - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Είναι: •  $h'(x) = \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}x^2 - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  με  $h'(0) = 0$

•  $h''(x) = -\eta\mu x + x > 0$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , αφού για  $x > 0$  είναι  $|\eta\mu x| < |x| \Rightarrow |\eta\mu x| < x \Rightarrow \dots \Rightarrow -\eta\mu x + x > 0$ . Αρα  $h' \uparrow [0, +\infty)$ , αφού η

$h'$  είναι συνεχής. Για  $x > 0 \Rightarrow h'(x) > h'(0) = 0$ .

Αρα  $h \uparrow [0, +\infty)$ , αφού η  $h$  είναι συνεχής.

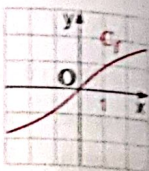
Για  $x > 0 \Rightarrow h(x) > h(0) \Rightarrow \dots \Rightarrow \eta\mu x + \frac{1}{6}x^3 - x > 0$ .

**Θέμα 80**

α. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$  ως πηλίκο

συντηρών. Εκπαιδών  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x} = \dots = 1 = f(1)$ ,

οπότε η  $f$  είναι συνεχής και στο 1. Αρα η  $f$  είναι συνεχής.



β. Είναι  $f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{x^2 \ln^2 x} < 0$ , για κάθε  $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ . Εκπαιδών η  $f$  είναι συνεχής στο 1, άρα  $f \downarrow (0, +\infty)$ , οπότε η  $f$  είναι 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

• Το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$  είναι το σύνολο τιμών της  $f$ . Είναι

$f((0, +\infty)) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$ , αφού

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \frac{1}{x \ln x} = (-1) \cdot (+\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

γ. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι: •  $|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 0 < 1 \leq \eta\mu^2 x \leq x^2 + 1$  και το ίσον, ισχύει μόνο για  $x = 0$ . Επειδή  $f \downarrow (0, +\infty)$  έχουμε:

$f(\eta\mu^2 x + 1) - f(x^2 + 1) \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , και το ίσον ισχύει μόνο για  $x = 0$ .

•  $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0$ , και το ίσον ισχύει μόνο για  $x = 0$ .

Βρίσκουμε ότι η εξίσωση έχει λύση την  $x = 0$ .

δ. Είναι  $\dots \Leftrightarrow f(2) - e^3 > f(3) - e^4$ , (1).

Έστω  $g(x) = f(x) - e^{x+1}$ ,  $x \in [2, 3]$ .

Βρίσκουμε  $g \downarrow [2, 3]$ , οπότε

η (1)  $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 2 < 3$ , που ισχύει.

**Θέμα 81**

α. Επειδή η  $f$  είναι κυρτή, η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα. Βρίσκουμε με το Θ. Fermat ότι  $f'(0) = 0$ .

Στο δεξιό πίνακα φαίνονται η μονοτονία και τα ακρότητα της  $f$ .

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f$	-	0	+
$f'$	$\searrow$	0	$\nearrow$
	ε.λ.	μ.	ε.λ.

β. Είναι  $f(f(x)) > 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$ , που ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αφού  $f(x) \geq 1 > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

γ. Είναι  $e^x > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+e^x} < 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Αφού  $f \downarrow [0, +\infty)$ , θα είναι 1-1 στο  $[0, +\infty)$ .

Αρα για  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $\dots \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 0$ .

δ. Είναι  $g(x) = 2f'(x)(f(x)-1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  με  $f(x)-1 > 0$  για κάθε  $x > 0$ .

Βρίσκουμε  $g \downarrow (-\infty, 0]$ ,  $g \uparrow [0, +\infty)$  και  $\min g = -1$ .

ε. Η  $g$  είναι 1-1 στο  $[0, +\infty)$ , οπότε για  $x > 0$  είναι  $\dots \Leftrightarrow g(x^2) = g(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 1$ .

**Θέμα 82**

α. Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = \mathbb{R}$ .

Είναι  $f'(x) = \dots = (x-1)e^x > 0$ , για κάθε  $x > 1$  και αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $-1$ , έχουμε  $f \uparrow A$ .

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχουμε  $f(A) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$ .

Βρίσκουμε  $f(A) = (0, +\infty)$ .

β. Είναι  $f''(x) = \dots = (x+1)(x-3)e^x$ ,  $x \in A$  και έχουμε το δεξιό πίνακα

$x$	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f''$	+	0	-	+
$f'$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$f$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	ε.λ.	μ.	ε.λ.	μ.

γ. Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  και  $f(x) > 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , έχουμε  $E(\Omega) = \int_0^1 f(x) dx = \dots = \int_0^1 x^2 e^x dx + \int_0^1 e^x dx = \dots = 2e - 3$ .

δ. Η εσωτερική της  $C_f$  στο  $x_1$  είναι

$\varepsilon: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$  και διέρχεται από το  $O(0, 0)$  όταν

$\dots \Leftrightarrow f(x_1) = x_1 f'(x_1)$ .

Εφαρμόζουμε το Θ. Βολζανο για τη  $g(x) = xf'(x) - f(x)$  στο  $[0, 1]$ . Είναι  $g'(x) = \dots = xf''(x) > 0$ ,  $x \in (0, 1)$ , οπότε είναι  $g \uparrow (0, 1)$ .

Εφαρμόζουμε το Θ. Βολζανο για τη  $g(x) = xf'(x) - f(x)$  στο  $[0, 1]$ . Είναι  $g'(x) = \dots = xf''(x) > 0$ ,  $x \in (0, 1)$ , οπότε είναι  $g \uparrow (0, 1)$ .

Εφαρμόζουμε το Θ. Βολζανο για τη  $g(x) = xf'(x) - f(x)$  στο  $[0, 1]$ . Είναι  $g'(x) = \dots = xf''(x) > 0$ ,  $x \in (0, 1)$ , οπότε είναι  $g \uparrow (0, 1)$ .

Εφαρμόζουμε το Θ. Βολζανο για τη  $g(x) = xf'(x) - f(x)$  στο  $[0, 1]$ . Είναι  $g'(x) = \dots = xf''(x) > 0$ ,  $x \in (0, 1)$ , οπότε είναι  $g \uparrow (0, 1)$ .

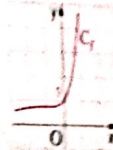
**Θέμα 83**

α. Είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots = 1 = f(0)$ , οπότε η  $f$  είναι

συνεχής στο 0. Εκπαιδών η  $f$  είναι συνεχής στο  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Αρα η  $f$  είναι συνεχής.

Αρα η  $f$  είναι συνεχής.



• Είναι  $f'(x) = \frac{x+1-e^x}{x^2 e^x} < 0$ , για κάθε  $x \neq 0$ , αφού  $e^x \geq x+1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και το ίσον ισχύει για  $x=0$ . Επειδή επιπλέον η  $f$  είναι συνεχής στο  $0$ , έχουμε  $f \downarrow \mathbb{R}$ .

β. • Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x-x}{x^2} = \dots = -\frac{1}{2}$  και βρίσκουμε  $\varepsilon: y = -\frac{1}{2}x+1$ .

γ. Αρκεί να δείξουμε ότι  $f(x) > -\frac{1}{2}x+1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+2-2e^{-x}}{2x} > 0$ , για κάθε  $x \neq 0$ .

Έστω  $g(x) = x^2-2x+2-2e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Είναι  $g'(x) = 2(e^{-x}-x+1) > 0$ , για κάθε  $x \neq 0$ , αφού  $e^{-x} \geq -x+1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και το ίσον ισχύει μόνο για  $x=0$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'$	$+$	$0$	$+$
$g$	$-$	$0$	$+$

Στο διπλανό πίνακα φαίνεται το πρόσημο της  $g$ . Οπότε, για  $x < 0$  είναι  $g(x) < 0$  και για  $x > 0$  είναι  $g(x) > 0$ .

Άρα  $\frac{g(x)}{2x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+2-2e^{-x}}{2x} > 0$ , για κάθε  $x \neq 0$ .

δ. Από το ερώτημα γ. και επειδή  $f(0)=1$ , έχουμε  $f(x) \geq -\frac{1}{2}x+1 \Leftrightarrow e^x f(x) \geq e^x(-\frac{1}{2}x+1)$ , για κάθε  $x \in [0, 1]$  και το ίσον ισχύει μόνο για  $x=0$ .

Οπότε  $\int_0^1 e^x f(x) dx > \int_0^1 e^x(-\frac{1}{2}x+1) dx$ . Είναι

$$\int_0^1 e^x(-\frac{1}{2}x+1) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 x e^x dx + \int_0^1 e^x dx = \dots = e - \frac{3}{2}$$

**Θέμα 84**

α. Η  $\varepsilon: y=x$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  αν και μόνο αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-x) = 0$ . Βρίσκουμε  $\alpha=1$ ,  $\beta=-1$ .

β. Είναι  $f'(x) = \dots = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ ,  $x \neq 1$

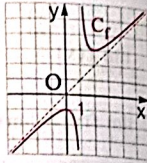
και έχουμε το διπλανό πίνακα.

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$	
$f'$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

γ. Για  $x \neq 0$ , είναι  $x^2+1 > 1$ ,  $x^4+1 > 1$ . Είναι  $\min f = f(2) = 3$ , στο  $(1, +\infty)$ .

Είναι:  $f(x^4+1) \geq 3$ ,  $x \neq 0$  και το " $=$ " ισχύει μόνο για  $x = \pm 1$ .

•  $f(x^2+1) \geq 3$ ,  $x \neq 0$  και ... Βρίσκουμε  $x = \pm 1$ .



δ. Έστω

$$h(x) = f(x) - x = \dots = \frac{1}{x-1} < 0, x \in [-1, 0].$$

$$\text{Είναι } E = -\int_{-1}^0 h(x) dx = \dots = -[\ln|x-1|]_{-1}^0 = \dots = \ln 2.$$

**Θέμα 85**

α. Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = (0, +\infty)$ .

Είναι  $f'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} > 0$ , για κάθε  $x > 0$ .

Οπότε  $f \uparrow A$  και επειδή η  $f$  είναι συνεχής, έχουμε

$$f(A) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}.$$

αφού:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots = \frac{4}{3} \cdot 0 + (-\infty) - 1 = -\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots = \frac{4}{3} \cdot (+\infty) + (+\infty) - 1 = +\infty.$$

β. Είναι:  $f''(x) = \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}$ ,  $x > 0$ .

$$\bullet f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\bullet f''(x) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x > 1$$

$$\bullet f''(x) < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Από το διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η  $f$  παρουσιάζει καμπή στο  $1$ .

Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $x_0=1$  είναι  $y-f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y=3x$ .

$x$	$0$	$1$	$+\infty$
$f''$	$-$	$0$	$+$
$f$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$

γ. Η  $f$  είναι κυρτή στο  $[1, +\infty)$ , οπότε  $f(x) > 3x$ , για κάθε  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  και  $\eta\mu x \geq 0$ , για κάθε  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , άρα  $\eta\mu x f(x) \geq 3x\eta\mu x$ , για κάθε  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  και το ίσον ισχύει μόνο για  $x = \pi$ .

$$\text{Οπότε } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \eta\mu x f(x) dx > \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3x\eta\mu x dx \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \eta\mu x f(x) dx > 3 \left[ -\cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx \Leftrightarrow \dots$$

δ. Είναι  $x > 1 \Rightarrow x^2 > x \Rightarrow f'(x^2) > f'(x)$ . Βρίσκουμε ότι το όριο είναι  $+\infty$ .

**Θέμα 86**

α. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = -2x \Leftrightarrow e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = -2x \Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 + 2e^{f(x)}x + x^2 = x^2 + 1$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)} + x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow |e^{f(x)} + x| = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}, (1).$$

Θέτουμε  $g(x) = e^{f(x)} + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και βρίσκουμε  $g(x) > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε

$$\eta (1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x), x \in \mathbb{R}.$$

β. Είναι  $f''(x) = \dots = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και έχουμε το διπλανό πίνακα.

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''$	$-$	$0$	$+$
$f$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$

γ. Έστω

$$h(x) = f(x) + x = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) + x, x \in \mathbb{R}.$$

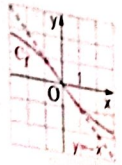
Είναι  $h(0)=0$  και  $h'(x) = f'(x) + 1 =$

$$= \dots = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}} > 0, x \neq 0 \text{ αφού για } x \neq 0 \text{ είναι } \sqrt{x^2+1} > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}-1 > 0.$$

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $1$  οπότε  $h \uparrow \mathbb{R}$  και για  $x > 0$  είναι  $h(x) > h(0) = 0$ .

$$\text{Είναι } E(\Omega) = \int_0^1 h(x) dx =$$

$$\begin{aligned} &= \dots = \int_0^1 x f(x) dx + \frac{1}{2} \\ &= \dots = f(1) + \int_0^1 (\sqrt{x^2+1}) dx + \frac{1}{2} \\ &= \dots = \ln(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



δ. Είναι  $f'(x) = \dots = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε  $f \downarrow \mathbb{R}$ , άρα είναι  $1-1$ , επομένως αντιστρέφεται. Βρίσκουμε  $f(A) = \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x \in A$  και  $y \in f(A)$ , έχουμε  $f(x) = y \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-x = e^y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = e^y + x \Leftrightarrow x^2+1 = (e^y+x)^2 \Leftrightarrow x^2+1 = e^{2y} + 2e^y x + x^2 \Leftrightarrow 2e^y x = 1 - e^{2y} \Leftrightarrow x = \frac{1-e^{2y}}{2e^y}$ .

Άρα  $f^{-1}(x) = \frac{1-e^{2x}}{2e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Θέμα 87**

α. Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = (0, +\infty)$ .

Πρέπει

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$x$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'$	$-$	$0$	$+$
$f$	$\searrow$	$2$	$\nearrow$

και έχουμε το διπλανό πίνακα.

β. Έστω  $\Delta_1 = (0, 1]$  και  $\Delta_2 = (1, +\infty)$ . Βρίσκουμε  $f(\Delta_1) = [2, +\infty)$  και  $f(\Delta_2) = (2, +\infty)$ , οπότε  $f(A) = [2, +\infty)$ . Επειδή  $3 \in f(\Delta_1)$ ,  $3 \in f(\Delta_2)$  και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στα  $\Delta_1, \Delta_2$ , η εξίσωση  $f(x) = 3$  έχει ακριβώς μία θετική ρίζα σε καθένα από τα  $\Delta_1, \Delta_2$  και καμία δεν είναι το  $1$ .

γ. Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $(x_0, f(x_0))$  είναι  $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$  και διέρχεται από το  $A(0, 3)$ , όταν  $\dots x_0 f'(x_0) - (f(x_0)-3) = 0$ .

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την  $h(x) = x f'(x) - (f(x)-3)$  στο  $[x_1, 1]$ . Έχουμε  $f(x_1) = 3$  με  $x_1 \in (0, 1)$  και  $f'(x_1) < 0$ , οπότε  $h(x_1) = \dots = x_1 f'(x_1) < 0$ . Είναι  $h'(x) = \dots = x f''(x) = \dots = \frac{2-x}{x^2} > 0$ ,  $x \in (x_1, 1)$ , οπότε  $h \uparrow (x_1, 1)$ .