ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
1ο Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου

Επιμέλεια : Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\Delta$.

β) Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε μπορεί να υπάρχει $x_0\in\Delta$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

γ) Ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$

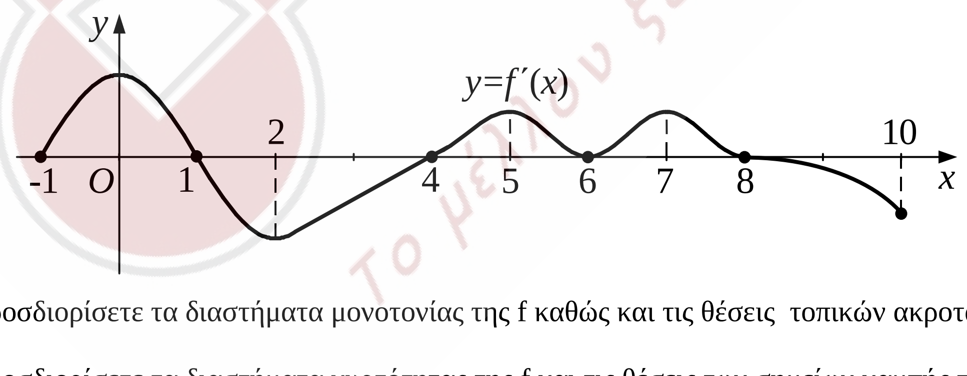
δ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

ε) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, τότε ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

μονάδες 5x2

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1,10]$.



Β1. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της f καθώς και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων.

μονάδες 9

Β2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα κυρτότητας της f και τις θέσεις των σημείων καμπής της.

μονάδες 9

Β3. Να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[-1,10]$, χρησιμοποιώντας μόνο τον άξονα x΄x (ανεξάρτητα από τις τιμές της f).

μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=12x\ln x+x^4-24x+3,\ x>0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $12\ln\rho+4\rho^3=12$.

μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο ρ του ερωτήματος Γ1.

μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\left(12\ln x+x^3\right)=24x-3$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

μονάδες 8

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{3}{\beta-\alpha}\ln\dfrac{\alpha}{\beta}<\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2$ για κάθε $\alpha,\beta>0$ με $\alpha<\beta$.

μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες δίνεται :

- $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+\int_0^1 g(x)dx\cdot x+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\beta x)}{x}}{x-1}, & x<1\\ \int_0^{\beta^2} e^{\sqrt{x}}dx\cdot x^2-2, & x\geq 1\end{cases}$, όπου $\beta>0$.
- Η f είναι συνεχής στο 1.
- Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\int_0^{\beta^2} e^{\sqrt{x}}dx=2\beta e^{\beta}-2e^{\beta}+2$.

μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\beta x)}{x}=\beta$.

μονάδες 2

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2xe^x-2e^x+x-1=0$ έχει μοναδική θετική ρίζα τον αριθμό 1.

μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 g(x)dx=-2$.

μονάδες 8

Δ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $g(\theta)=-2$

μονάδες 6

Καλή Επιτυχία!

2ο Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου
Επιμέλεια : Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 7

Α3. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1 -1;

μονάδες 7

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Για να είναι το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ σημείο καμπής της C_f, αρκεί η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0.

β) Αν f,g,h είναι τρείς συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει: $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

γ) Αν για μια συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[\alpha,\beta]$, τότε εφαρμόζεται και το θεώρημα της μέσης τιμής, στο ίδιο διάστημα.

δ) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, έχει μόνο μια παράγουσα στο Δ.

ε) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

μονάδες 5x2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}$, όπου α,β ακέραιοι με $\beta\neq-\alpha^2$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(f(x))=x$ για κάθε $x\neq\alpha$.

μονάδες 6

Β2. Αν η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=-1$ στο $+\infty$ και εφαρμόζεται για την $g(x)=f(x)+x^2-4x+3$ το θεώρημα Bolzano στο $[1,3]$, να δείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

μονάδες 8

Έστω $\alpha=-1$ και $\beta=2$

Β3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

μονάδες 5

Β4. Υλικό σημείο $M(x,y)$, $x>-1$ κινείται επί της C_f. Αν η τετμημένη του M μεταβάλλεται με ρυθμό 3 cm/sec, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από τον άξονα x΄x.

μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=3$, $f'(0)=3$ και $f(x)-3\leq\int_3^4 xf(t)dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\int_3^4 f(x)dx=3$.

μονάδες 7

Γ2. Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (3,4)$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha)=3$.

μονάδες 6

Γ3. Έστω ότι $f(1)>3$ και $0<f(2)<3$. Να δείξετε ότι:

α) υπάρχουν $\beta,\gamma \in (0,\alpha)$ τέτοια, ώστε $f'(\beta)=f'(\gamma)=0$.

μονάδες 7

β) η εξίσωση $\dfrac{f(x)+3x-6}{x-1}+\dfrac{f(x)}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f'(x)=2xe^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $f(0)=0$.
- $\int_0^1 g(x)dx \cdot e^{\int_0^1 g(x)dx-1}-2e^{\int_0^1 g(x)dx-1}=-1$.
- $g(x)\neq 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=2xe^x-2e^x+2$.

μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

μονάδες 5

Δ3. Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f,άξονα x΄x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ είναι ίσο με $E=6-2e$.

μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι $g(x)>0$.

μονάδες 7

Καλή Επιτυχία!

3ο Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου
Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 7

Α2. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα;

Μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Η συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, αν για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 = x_2$ είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

β) Αν $f(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 και υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$.

γ) Αν $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$, $\lim\limits_{x \to \beta} g(x) = \gamma$ και $f(x) \neq \beta$ κοντά στο α, τότε $\lim\limits_{x \to \alpha} g(f(x)) = \gamma$.

δ) Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό.

ε) Αν η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

μονάδες 5x2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$.

Β1. Να βρείτε την παράγωγο της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε διάστημα $[\alpha,\beta]$ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f.

Μονάδες 6

Β3. Με βάση τις προϋποθέσεις του Θ.Rolle, να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη.

Μονάδες 3

Β4. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που άγονται από το σημείο $A(0,-1)$.

Μονάδες 5

Β5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 2$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ για την οποία ισχύει ότι
$9x^2 + 2f(1) - 2 \leq 3f'(x) \leq 9x^2 - 4f(1) - 4 + f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x^3$.

Μονάδες 7

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε σημείο της $M(\alpha, \alpha^3)$, $\alpha \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο Ν εκτός του Μ. (μονάδες 3)
Στο σημείο Ν η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο Μ. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7x - 4$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2-2\beta x+1, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Δ1. Αν $\alpha=\int_0^1 g^2(t)dt$ και $\beta=\int_0^1 g(t)dt$, όπου g συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$,

να δείξετε ότι :

α) $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $\left(\int_0^1 g(t)dt\right)^2 \leq \int_0^1 g^2(t)dt$.

Μονάδες 4+4

Δ2. Αν $\alpha=\int_0^1 \ln(t+1)dt=$ και $\beta=2\ln 2-1$:

α) να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=2017$.

Μονάδες 4+4

Δ3. Αν $\int_0^1 f(x)dx=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{-3x^2+e^x+2x}=1$:

α) να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha\neq 0$ και β.

β) αν $\alpha=-3$ και $\beta=0$ να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=e^x\cdot f(x)$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=0$ και $x=\dfrac{1}{3}$.

Μονάδες 5+4

Καλή Επιτυχία!

4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 14 ΜΑΪΟΥ 2023

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ **Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

(Μονάδες 7)

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.

(Μονάδες 4)

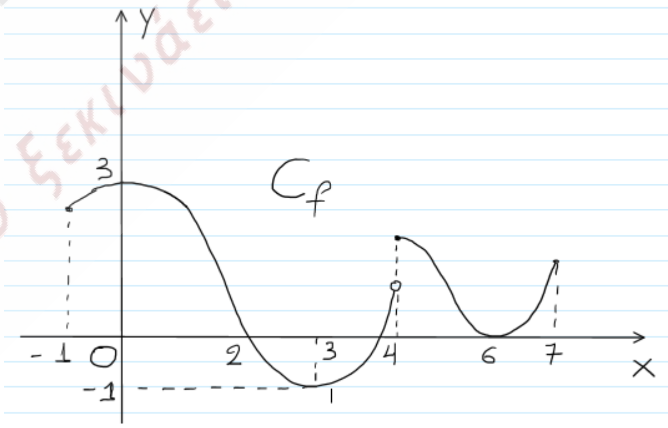
Α3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f **.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις και να τις συμπληρώσετε ώστε να προκύψουν μαθηματικά αληθείς προτάσεις **.**

i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το A=____________ , ενώ το σύνολο τιμών της είναι το f(A)=_________.

ii. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο της x_0=_____

iii. Στο διάστημα [0,3] ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος ________________.

iv. Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το _____ στην θέση x_1 =_____ , ενώ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το ______ στην θέση x_2 =____.



(Μονάδες 4)

Α5. Να χαρακτηρίσετε τος παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

α. Μια γραμμή μπορεί να αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης , όταν κάθε κατακόρυφη ευθεία την τέμνει το πολύ σε ένα σημείο

β. Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ με την γραφική παράσταση της f.

γ. Αν $c > 0$ τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$, $\alpha < \beta$, εκφράζει το εμβαδό του ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c.

δ. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$, ισχύει η συνεπαγωγή : αν $f(x_1) \neq f(x_2)$ τότε $x_1 \neq x_2$.

ε. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f''(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά καμπή στο x_0.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$, $x \neq 2$ και $h(x) = e^x - x, x \in \mathbb{R}$

Β1. Να δείξετε πως η $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε την συνάρτηση $(fof)(x)$ και να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις fof και $g(x) = x$, είναι ίσες.

Μονάδες 5+2

Β3. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{|h(x) - 2| + \eta\mu x - 1}{x + \sigma\upsilon\nu x - 1} \quad \text{και} \quad L_2 = \lim_{x \to 2} f(x)$$

Μονάδες 4+4

Β4. Να δείξετε πως η εξίσωση $f(x) = \dfrac{h(x)}{\alpha - x}$, $\alpha > 2$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοιχτό διάστημα $(2, \alpha)$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μία συνάρτηση $f(x) = \dfrac{4}{x-1} + \alpha \cdot x$, $x \neq 1$.

Δίνεται ότι $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} = -6$.

Γ1. Να δείξετε πως $f'(2) = -3$ και να βρείτε το α.

(μονάδες 4+2)

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε πως α=1:

Γ2.

i.Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f'(x)$

ii.Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της f και της συνάρτησης

$g(x) = \frac{x^2}{2} + x \cdot (1 - \ln x)$, $x > 0$, δεν έχουν παράλληλες εφαπτομένες.

(μονάδες 3+4)

Γ3. Έστω $M(x, y), x \in (0,4)$, σημείο της εφαπτομένης (ε) της f στο $x = 2$.

Από το Μ φέρνουμε κάθετες στους άξονες $x'x$ και $y'y$ που τους τέμνουν στα σημεία Β , Γ αντιστοίχως. Να βρείτε το Μ , ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΜΒΟΓ να είναι μέγιστο.

(Μονάδες 6)

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_2^4 \frac{f(x)}{x} dx$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1), x < 0 \\ x \cdot \eta\mu x, 0 \le x \le \pi \end{cases}$

Δ1.

i. Να δείξετε πως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την f στο [ο,π].
ii. Να δείξετε πως υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ώστε $\varepsilon\varphi x_0 + x_0 = 0$.

(Μονάδες 3+5)

Δ2. Να αποδείξετε πως η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 το $f(x_0) = -\frac{\eta\mu x_0}{\sigma\varphi x_0}$.

(Μονάδες 4+4)

Δ3. Να αποδείξετε πως οι συναρτήσεις f και g , όπου $g(x)=e^{-x}\cdot f(x)$, έχουν κοινή εφαπτομένη τον άξονα x'x ,στο σημείο τους με τετμημένη x=0.

(Μονάδες 4)

Δ4. Να αποδείξετε πως $\int_{0}^{x_0} f''(x)\cdot \text{συν}x\,dx > 0$.

(Μονάδες 5)

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στην κόλλα σας.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**5ο Διαγώνισμα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΠ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ:	Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. **(Μονάδες 7)**

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ; **(Μονάδες 5)**

Α3. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$;

(Μονάδες 3)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος

α) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό. Σ Λ

β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο το κ όταν ισχύει $f(x) \leq \kappa$ για κάθε $x \in A$. Σ Λ

γ) Αν $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - (\lambda x + \beta)\right] = 0$ τότε η ευθεία y = λx + β λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. Σ Λ

δ) Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in D_f \cap D_g$, τότε είναι $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in D_f \cap D_g$. Σ Λ

ε) Αν το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της δύο φορές παραγωγίσιμης f, τότε $f''(x_0) = 0$. Σ Λ

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να υπολογίσετε τις f', f''. **(Μονάδες 3)**

Β2. α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(Μονάδες 6)**

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε αν υπάρχουν τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f. **(Μονάδες 3)**

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **(Μονάδες 5)**

Β4. α) Να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f. **(Μονάδες 3)**

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \Re$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)+e^{f(x)}=x$ για κάθε $x\in R$ (1)
- Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ στο $\mathrm{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. **(Μονάδες 2)**

β. Η f είναι κοίλη στο R. **(Μονάδες 2)**

γ. Η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ **(Μονάδες 3)**

δ. Το σύνολο τιμών της f είναι f(R) = R. **(Μονάδες 5)**

Γ2. Να βρείτε την αντίστροφη της f και στη συνέχεια το πρόσημο της f **(Μονάδες 3)**

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο σημείο που αυτή τέμνει τον x΄x και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $2f(x)+1=x, x\in\Re$ **(Μονάδες 4)**

Γ4. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{f(x)}{f'(x)}\geq x-1$ για κάθε $x\in\Re$ **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω F μια αρχική της συνεχούς $f:\Re\to\Re$ για τις οποίες ισχύουν: $F(0)=0,\ F(x)\geq 3x\ \text{για}\ x\in R,\ f(x)\neq x\ \text{για}\ x\in R$ και H μια αρχική της $h(x)=\dfrac{x}{f(x)-x}$ για την οποία ισχύει: $\mathrm{H(x)=f(x)-x-3}$ *για κάθε* $\mathrm{x\in R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}, x\in\Re$ **(Μονάδες 2)**

Δ2. Να αποδείξετε ότι i) $f(0)=3$ ii) $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}, x\in\Re$ **(Μονάδες 3+6)**

Δ3. α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $2F(x+1)<F(x)+F(x+2), x\in\Re$ **(Μονάδες 5)**

β. Να λύσετε την εξίσωση: $F(2^x+2017)-F(2^x+2016)=F(4^x+2017)-F(4^x+2016)$ **(Μονάδες 5)**

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{[F(2)-2F(x)]x^{2017}}{x-1}+\dfrac{H(x)2017^x}{x-3}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,3). **(Μονάδες 4)**

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

6ο Διαγώνισμα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
Επιμέλεια : Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η f ΄(x) διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Μονάδες 10

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat και να το ερμηνεύσετε γραφικά.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=l$ με $l>0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-l$.

2. Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και 1-1, τότε οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} (αν υπάρχουν) είναι λύσεις της εξίσωσης f(f(x))=x.

3. Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ έχει μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή.

4. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, τότε η γραφική παράσταση της f έχει πάντα οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

5. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο [α,β] ισχύει ότι : $\int_\alpha^\beta |f(x)|dx=\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}$.

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 7

Β3. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 f^{-1}(x)\right)$

Μονάδες 5

Β4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=\dfrac{1}{e}$, $x=1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f, ορισμένη στο Α με σύνολο τιμών $f(\mathrm{A})=[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει : $e^{f(x)}+f(x)=x$, για κάθε $x\in \mathrm{A}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι $\mathrm{A}=[1,+\infty)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $f\circ f$ και έπειτα να δείξετε ότι η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_1^{e+1} e^{f(x)}\cdot f(x)dx$.

Μονάδες 7

Γ4. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει :

$$\left(x^2+1\right) f\left(x^2\right) > x^2 f(1) + f\left(x^4\right)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν :

- $f''(x) = \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{1}{x} - f'(x)$, για κάθε $x > 0$.
- $f(1) = \frac{e+1}{e}$
- $e\big(1 - f(x)\big) \le x - 2$, για κάθε $x > 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι : $f'(1) = -\frac{1}{e}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = -\ln x + x + e^{-x}$, $x > 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε σημείο $x_0 \in (0,2)$ για το οποίο ισχύει $f(x_0) > 1$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχει μοναδικό $x_1 < x_0$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = f(2)$

Μονάδες 5

β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) - f(2) = f'(\xi)$.

Μονάδες 5

Καλά Αποτελέσματα!

Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
7ο Διαγώνισμα
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μονάδες 8

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
« Για οποιαδήποτε κυρτή συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ ισχύει ότι $f''(x)>0$ *για κάθε* $x\in\Delta$*.»*

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή (Α) ή ψευδή(Ψ). (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

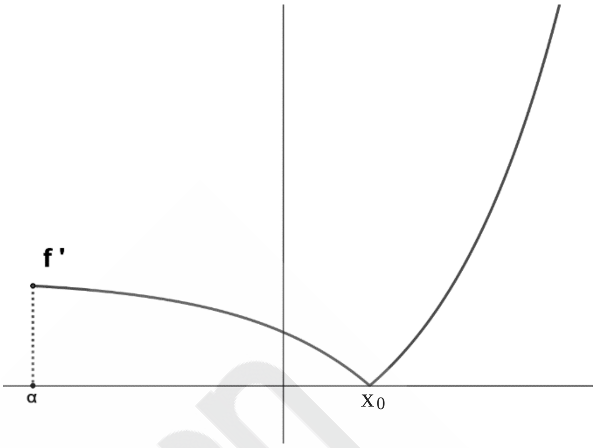
Μονάδες 4

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και g είναι συνάρτηση συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεση της g με την f είναι συνεχής στο x_0.
2. Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ έχει πάντα ένα ακριβώς σημείο καμπής.
3. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι είναι κυρτή στο $(\alpha,x_0]$ και κοίλη στο $[x_0,\beta)$ τότε είναι βέβαιο ότι το $(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της.
4. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$.

Μονάδες 8

Α4. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $[\alpha,+\infty)$.



Από τις ακόλουθες προτάσεις αληθής είναι η

α. Η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα

β. Η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής.

γ. Η συνάρτηση f δεν έχει κρίσιμα σημεία.

δ. Δεν υπάρχει διάστημα του πεδίου ορισμού της f ΄ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{f(x)+2e^{x+1}-1}{x+1}\right)=2.$$

Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\alpha^x}{1-e^x}$, όπου α είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

Β1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\left(-1,f(-1)\right)$ και είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=-1$.

Μονάδες 8

Β2. Αν η ευθεία (ε) του προηγούμενου ερωτήματος είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=e$.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.

Μονάδες 4

γ. Να βρείτε την αντίστροφη τής συνάρτησης g.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και τέτοια ώστε $f(x)\cdot f'(x)=x-\frac{1}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$.

Μονάδες 6

Γ2.α. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1: y=-x+\frac{1}{2}$ και $\varepsilon_2: y=x-\frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. (μονάδες 4)

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2-x+1>\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ και ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από τις ασύμπτωτές της $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ του προηγούμενου υποερωτήματος. (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Γ3. Αν E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=3$ να αποδείξετε ότι $E_1>3$.

Μονάδες 4

Γ4.α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)=f(1-x)$. (μονάδες 2)

β. Αν E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y=1$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $x=\frac{1}{2}$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία. (μονάδες 6)

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$f(x)=\ln^2 x-\dfrac{1}{x}+\int_1^e (f(x)-1)dx+2$.

Δ1.α. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e\left(\ln^2 x-\dfrac{1}{x}\right)dx=e-3$ (μονάδες 3).

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln^2 x-\dfrac{1}{x}$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ2.α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (μονάδες 6)

β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$f\left(x^{\ln x}\right)=f\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$. (μονάδες 3)

Μονάδες 9

Δ3.α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $1-\dfrac{1}{x}-\ln x\le 0$.

Πότε ισχύει η ισότητα; (μονάδες 2)

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη. (μονάδες 2)

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι

α. $f(2)>\dfrac{f(3)-1}{2}$ (μονάδες 2)

β. υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(3)-1}{\xi^2-3\xi+4}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 6

Καλά Αποτελέσματα

8ο Διαγώνισμα ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΤΟΜΗ ΔΡΟΣΙΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α,β] με f(α)<f(β). Να αποδείξετε ότι για κάθε $\eta \in \left(f(\alpha), f(\beta)\right)$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = \eta$.

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος Δ και είναι κυρτή στο Δ, θα ισχύει ότι: $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό με Α (αληθής) ή Ψ (ψευδής).

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν οι συναρτήσεις f και g ορίζονται στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, τότε και η σύνθεση $g \circ f$ θα ορίζεται στο $\mathbb{R}$.
2. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ θα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = x_0$.
3. Αν η συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ αλλάζει καμπυλότητα εκατέρωθεν του $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f.
4. Αν F είναι μία παράγουσα της συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ, τότε το σύνολο των παραγουσών της f στο διάστημα Δ είναι οι συναρτήσεις της μορφής F(x)+c, $c \in \mathbb{R}$ και μόνον αυτές.
5. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$ τότε είτε $\alpha = \beta$ είτε $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες: 7 + (1+3) + 4 + 10

ΘΕΜΑ Β

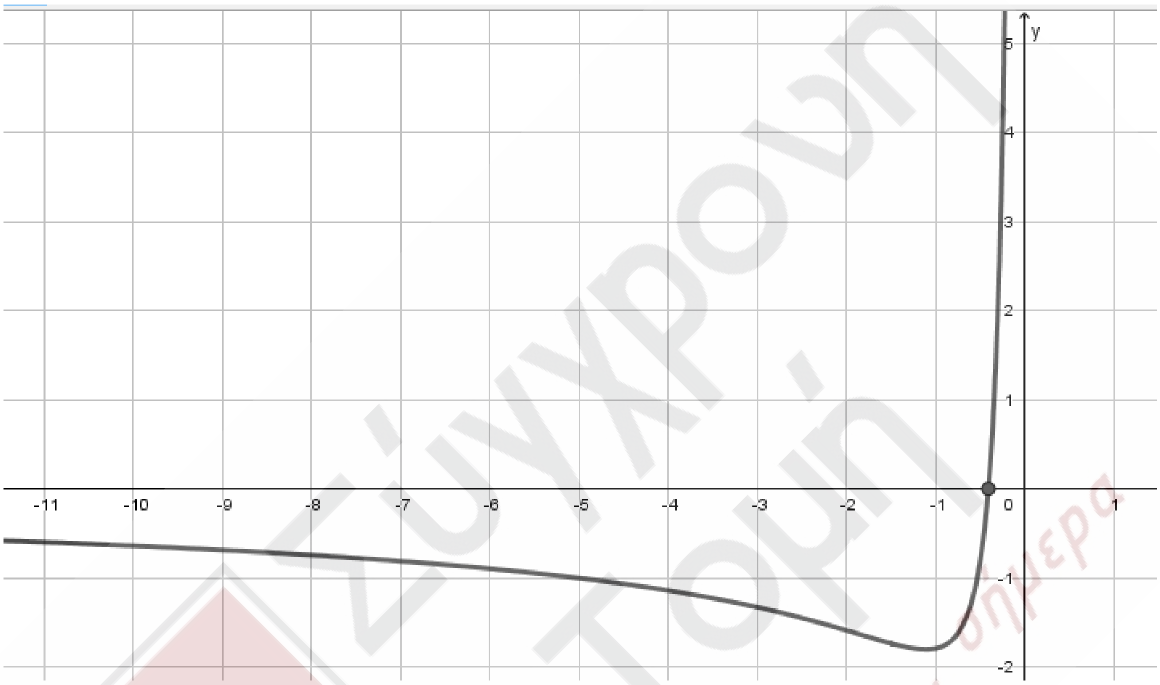
Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \dfrac{\ln(\alpha x)}{x}, \alpha < 0$

Β1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την καμπυλότητα και να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει ασύμπτωτες τους άξονες των τετμημένων και τεταγμένων.

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται ότι: α=-1.

Β3. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση που δίνεται στο σχήμα, μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

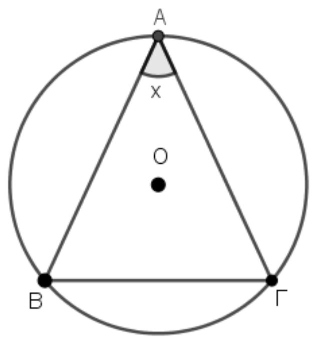


Β4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=\frac{\alpha}{e}$ και $x=\frac{e^2}{\alpha}$.

Μονάδες: 7 + 7+ 5 + 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=(1+\text{συν}x)\cdot\text{ημ}x,\ x\in(0,\pi)$



Γ1. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1. Αν x είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου, τότε :

i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από την συνάρτηση f.

ii) Να βρείτε την τιμή της γωνίας $x\in(0,\pi)$ για την οποία το εμβαδόν μεγιστοποιείται.

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(2,3)$ τέτοια ώστε: $f^2(3)-f^2(2)=2\cdot f'(x_1)\cdot f(x_2)$

Γ3. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+1 & ,x\le 0 \\ \dfrac{f(x)}{x(1+\sigma\upsilon\nu x)}, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι το $x_0=0$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της g.

Μονάδες: (5+6)+6+8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,+\infty]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\int_1^{f(1)}\dfrac{x^2-4}{x^2+1}dx-\int_{f(1)}^{1}\dfrac{5}{x^2+1}dx=0$ και
- $xf'(x)\ge f(x)$ για κάθε $x\ge 1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(1)=1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta=[1,+\infty)$ και στη συνέχεια ότι το σύνολο τιμών της είναι: $f(\Delta)=[1,+\infty)$.

Δ3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(\kappa)\sqrt{x^2-x+1}-x\right)=\lambda$.

Δ4. Για κάθε πραγματικούς αριθμούς α<β από το διάστημα $\Delta=[1,+\infty)$, να αποδείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f(x)dx>\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-\beta\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha$.

Μονάδες: 5 + 8 + 5 + 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
2. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
3. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
4. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
5. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Σύγχρονη τομή Δροσιάς

9ο Διαγώνισμα ΤΡΙΩΡΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ   Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

Α2. Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως σωστό ή λάθος, **αιτιολογώντας την απάντηση σας.**

i. Αν μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ, είναι κυρτή στο Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ τότε $f''(x)>0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ.

ii. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ. Ποια σημεία του Δ λέγονται κρίσιμα σημεία της f;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στις κόλλες σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

ii. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

iii. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta}+\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f' και g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

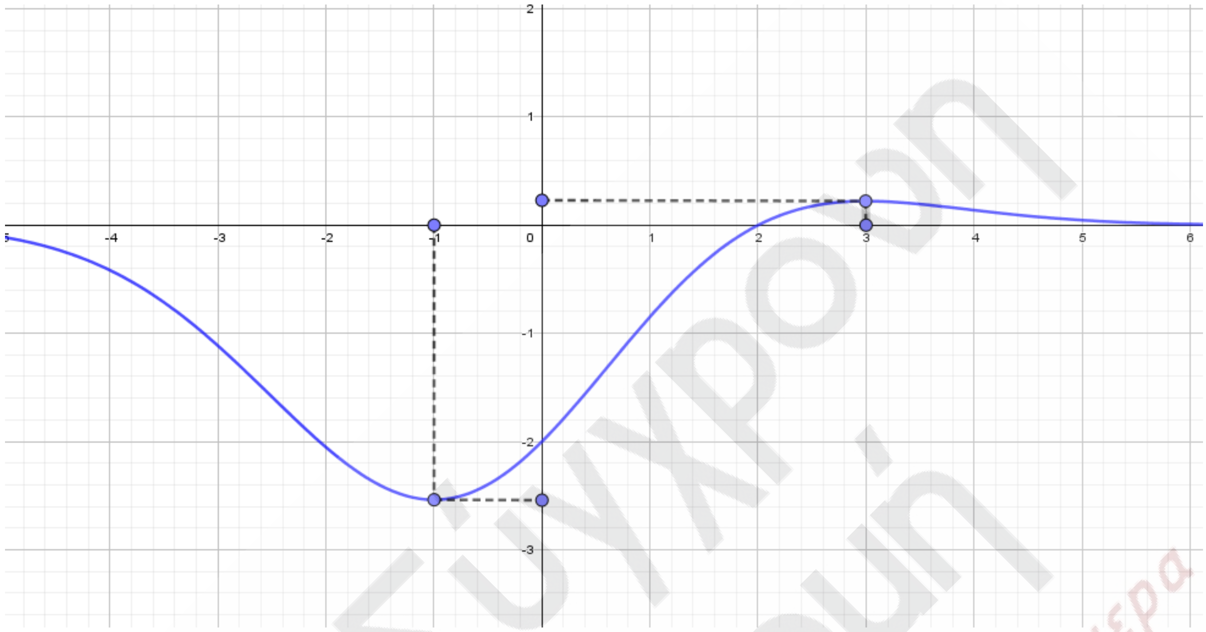
iv. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ για x κοντά στο x_0.

v. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 6+(2Χ3)+3+(2Χ5)

ΘΕΜΑ Β

Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=(x-\gamma)e^{\alpha x^2+\beta x+\delta}$, όπου α, β, γ και δ πραγματικοί αριθμοί.



Β1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=(x-2)e^{-\frac{x^2}{6}}, x\in\mathbb{R}$.

Β2 Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=\begin{cases} f(x), & x<-1 \\ (x+1)\eta\mu(x+1), & -1\le x\le \pi-1 \\ \dfrac{\ln(x-\pi+2)}{x-\pi+1}, & x>\pi-1 \end{cases}$

i. Να εξετάσετε αν η g είναι συνεχής στο -1 και στο π-1.

ii. Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προυποθέσεις του θεωρήματος Rolle, για την συνάρτηση g, στο $[-1,\pi-1]$

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(-1,\pi-1)$, για το οποίο ισχύει ότι $\sigma\varphi(\xi+1)=-\dfrac{1}{\xi+1}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 9+6+6+4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + \frac{1}{2}x$ και $g(x) = -\frac{x^2}{2}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός x_0, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$.

Γ2.

i. Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική θέση ελαχίστου x_1, με $x_1 \in (0,1)$ και $f(x_1) < 0$.

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(-g(x)) = 0$.

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f' ως προς τα ακρότατα και να βρείτε τους θετικούς αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει ότι : $\frac{\ln \alpha}{\alpha^2} + \frac{\ln \beta}{\beta^2} = \frac{1}{e}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 7+6+7+5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει ότι:

$f'(x) = f(x) - x + \frac{x^2}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ και ότι η f έχει μοναδική αρνητική ρίζα ρ για την οποία ισχύει ότι: $\rho = 2\ln(-\rho) - \ln 2$.

Δ2.

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει ότι: $3f(2x) \leq f(4x) + 2f(x)$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii. Έστω πραγματικός αριθμός $\alpha > 1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{3f(2x) - f(4x) - 2f(x)}{x-1} = \frac{f(x) - x - 1}{x - \alpha}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, \alpha)$.

Δ3. Δίνεται συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x^2)$. Έστω Ε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_h του $x'x$ του $y'y$ και της ευθείας $x = 1$. Να αποδείξετε ότι $E > \frac{37}{30}$

ΜΟΝΑΔΕΣ: (4+2)+5+4+5+5

10ο Διαγώνισμα

Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 24 ΑΠΡΙΛΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν f είναι συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha).$$ **Μονάδες 7**

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$; **Μονάδες 4**

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. **Μονάδες 4**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Αν $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις τότε η σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g είναι βέβαιο ότι ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

2. Αν f είναι συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα Δ τότε για οποιαδήποτε $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$ ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$.

3. Ισχύει πάντα η ισοδυναμία $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = \ell$.

4. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντα διάστημα.

5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι πάντα συμμετρική, ως προς τον άξονα $y'y$, της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+1)e^{1-x}+x$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

Μονάδες 5

Β2. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της. (μονάδες 5)

β. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)\geq x$. (μονάδες 2)

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

Β4. α. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}.

Μονάδες 3

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} και τις ευθείες $y=x$ και $x=e$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x+\sqrt{4x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε η ευθεία (ε): $y=f(1)x+f(0)-3$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της g στο $x_0=0$ και $\int_0^1 f(x)dx=\alpha-e$ όπου α είναι θετικός πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $x^\alpha\leq\alpha^x$ για κάθε $x>0$.

Γ1. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(1)$. **Μονάδες 6**

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\alpha=e$. **Μονάδες 5**

Γ3. Να αποδείξετε ότι :

α. υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)<0$. **Μονάδες 4**

β. υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $2\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$.

Μονάδες 6

Γ4. Ένα σημείο $A(k,g(k))$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τέτοιο τρόπο ώστε η τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό $k'(t)=k(t)\ ^{\mu o\nu}/_{sec}$, όπου t ο χρόνος.
Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο A τη χρονική στιγμή που $k=\sqrt{2}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε :

- Η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f'(x)\le 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(-2)=-4$ και $f(2)=4$
- Η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)g(x)-x^2}{x-2}=f'(2)+4$

Να αποδείξετε ότι :

Δ1. **α.** $g(2)=1$ και $g'(2)=2$. **Μονάδες 5**

β. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$. **Μονάδες 4**

Δ2. Η $G(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-1}{x-2}, & x>2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{g(x)+1}+3^{g(x)}}{2^{g(x)}-e^{g(x)}}, & x=2\end{cases}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.

Μονάδες 5

Δ3. **α.** $f(0)=0$. **Μονάδες 4**

β. Η εξίσωση

$$(5x-13)g(x)+f(-2x+6)=(x-2)g(4)+1+(x-3)\left(\int_2^4\frac{G(x)}{x}dx-\ln 4\right)$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(2,3)$.

Μονάδες 7

Καλά Αποτελέσματα

11ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 7 ΜΑΪΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}, \nu \in \mathbb{N}-\{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x)=\nu x^{\nu-1}, \text{ δηλαδή } (x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε το σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α3. Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ μία $1-1$ συνάρτηση. Ποια συνάρτηση ονομάζεται αντίστροφη της f;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα αναφοράς σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$, τότε το 1 είναι κρίσιμο σημείο της f στο $\mathbb{R}$.

β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta=[\alpha,\beta]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το $f(\Delta)=[f(\alpha), f(\beta)]$.

γ. Αν $f(x)>0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0.

ε. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f το πολύ ένα κοινό σημείο.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

- $xf'(x) = xe^x + x^2e^x - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)+1}{x} = -1$

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$.

Μονάδες 4

Β2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^x - 2x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Β3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 6

Β5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)+5}{x-2} = 1$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,2)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha \ln\frac{1}{x} - 3,\quad x > 0$ για την οποία ισχύει ότι $f(x) \geq -2$, για κάθε $x > 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$x^2 - 2\ln x = 3 - 2e^{\lambda} - \lambda^{2017}$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x+1)}{2 - 2e^x - x^{2017}}$$

Μονάδες 5

Γ5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ε της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, της εφαπτομένης ε και της ευθείας $x = 2$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ και $t: [0,1] \to \mathbb{R}$ με:

- $f(x) = \ln\big(h(x)\big)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $g(x) = e^{\alpha x} - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$, της οποίας η ελάχιστη τιμή γίνεται μέγιστη για $\alpha = h^2(0) + 1 - e$,
- $\frac{x}{h(x)} + \frac{1}{h'(x)} = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $\int_0^1 \left(\ln t(x) \cdot \ln \frac{t(x)}{e^{2\cdot 10^x}}\right) dx = -\frac{99}{\ln 100}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $h(0) = \sqrt{e}$.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$h(x) = \sqrt{x^2 + e} + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να λύσετε την ανίσωση:

$$f(5^x+12^x)+f(-13^x)<1$$

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$ με $0\le F(0)\le 1$ και $\int_0^{F(0)} t(x)dx=0$.

α. Να αποδείξετε ότι:

$$t(x)=e^{10^x}, x\in[0,1]$$

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι:

$$F(0)=0$$

Μονάδες 2

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε:

$$F(\xi-e)=\xi f(\xi-e)\ln\frac{1}{\xi}$$

Μονάδες 3

<u>**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**</u>

1. **Στην αρχή των απαντήσεων σας** να γράψετε πάνω–πάνω τα ατομικά σας στοιχεία, την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στην κόλλα αναφοράς.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρηση σας να παραδώσετε μαζί με την κόλλα αναφοράς και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στην κόλλα αναφοράς σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 09:30

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

Σύγχρονη Τομή

Το μέλλον ξεκινάει... σήμερα

12ο Διαγώνισμα

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

(μονάδες 7)

Α.2. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Πότε το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της C_f;

(μονάδες 5)

Α.3. Να αναφέρετε τις πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ.

(μονάδες 3)

Α.4. Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό** ή **Λάθος**, τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in \mathrm{A}_f$, τότε θα ισχύει $f'(x_0)=0$.

β) Αν $\mathrm{A}_f=[\alpha,\beta]$ και η f είναι συνεχής στο A_f, τότε η C_f δεν θα έχει ασύμπτωτες.

γ) Αν $\mathrm{A}_f=\mathbb{R}$ και $x_0\in\mathbb{R}$ με $f'(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f.

δ) Αν $f''(x_0)=0$, τότε η C_f έχει στο σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής.

ε) Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-4x+1\right)=0$, τότε η ευθεία $\varepsilon: y=4x+1$ θα είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

(μονάδες 2 x 5 = 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β.1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και το σύνολο τιμών της.

(μονάδες 6)

Β.2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής της, αν υπάρχουν.

(μονάδες 5)

Β.3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

(μονάδες 5)

Β.4. Να σχεδιάσετε πρόχειρα την C_f.

(μονάδες 5)

Β.5. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $x=k\cdot e^x$, για τις διάφορες τιμές του $k\in\mathbb{R}$.

(μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-x+1$, $x\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha\in(0,+\infty)$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq 2$:

Γ.1. Να δείξετε ότι $\alpha=e$.

(μονάδες 6)

Γ.2. Να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ έχει εξίσωση $\zeta: y=-x+1$.

(μονάδες 6)

Γ.3. Να βρεθεί το σημείο $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}, f''(x_\mathrm{M}))$ της $C_{f''}$,με $x_\mathrm{M}\leq 0$, στο οποίο το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της $C_{f''}$ στο σημείο M, με τους άξονες συντεταγμένων, γίνεται μέγιστο.

(μονάδες 7)

Γ.4. Αν $k>0$, να δείξετε ότι: $f(4k)+2f(k)>3f(2k)$.

(μονάδες 6)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

- Αν $x<0$: $f''(x)=2$
- Αν $x>0$: $\dfrac{\ln(f(x))}{x}=\ln x$
- $f'(-1)=-f(-1)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\eta\mu(\eta\mu(-2x))}{x}\right]$
- $f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+f'(x)}{f'(x)}$

Δ.1. Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x^2+1 &, x<0 \\ 1 &, x=0 \\ x^x &, x>0 \end{cases}$

(μονάδες 7)

Δ.2. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο A_f.

(μονάδες 4)

Δ.3. Να βρείτε την f'' και να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο A_f.

(μονάδες 4)

Δ.4. Αν $x>0$

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(μονάδες 6)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $x^{x-1}-1\le 0$.

(μονάδες 4)

Ευχόμαστε επιτυχία!

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
13ο Διαγώνισμα

Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(μονάδες 6)

Α.2. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Rolle.

(μονάδες 3+2=5)

Α.3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία της f ονομάζονται κρίσιμα;

(μονάδες 4)

Α.4. Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό** ή **Λάθος**, τις παρακάτω προτάσεις:

α) Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f \nearrow$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, τότε ισχύει $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$.

β) Ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$.

γ) Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, για την οποία ισχύουν $f(2022)=2$ και $f(2023)=1$. Τότε υπάρχει $x_0 \in A_f$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\sqrt{2}$.

δ) Αν $A_f = [\alpha, \beta]$ και ισχύει $f''(\alpha)=0$, τότε η συνάρτηση f έχει σημείο καμπής.

ε) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$, τότε θα ισχύει $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

(μονάδες 2 x 5 = 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x+1 & , x\le 0 \\ \ln(x+1)+\alpha, & x>0 \end{cases}$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο A_f.

Β.1. Να δείξετε ότι $\alpha=2$.

(μονάδες 5)

Β.2. α) Να βρείτε την f' και να δείξετε ότι $f \nearrow$ στο A_f.

(μονάδες 4)

β) Να βρείτε την f'' και να δείξετε ότι το σημείο $(0, f(0))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

(μονάδες 4)

Β.3. Να βρείτε την σύνθεση της g με την f, όπου $g(x)=\ln x,\ x>0$.

(μονάδες 6)

Β.4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\right]$.

(μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=0$.

Αν $f(0)=\dfrac{1}{e}$:

Γ.1. Να δείξετε ότι $f(x)=e^{-e^{-x}},\ x\in\mathbb{R}$.

(μονάδες 5)

Γ.2. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f.

(μονάδες 4)

Γ.3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x)=-\ln(-\ln x),\ x\in(0,1)$.

(μονάδες 6)

Γ.4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0, όπου $x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$.

(μονάδες 5)

Γ.5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις $C_{f''}$, $C_{f'}$ και τον άξονα $y'y$.

(μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και η f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.
Αν ισχύουν:

- $f(1)=\int_1^e \ln x dx-1$
- $\int_\alpha^\beta \left(x^2\cdot f'(x)+\ln x-1\right)^{2022} dx \le \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $0<\alpha<\beta$ και g συνάρτηση συνεχής και

περιττή με $\mathrm{A}_g=\mathbb{R}$.

Δ.1. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\ x>0$

(μονάδες 6)

Δ.2. Αν για κάθε $x>0$ ισχύει $x^{\ln\gamma}\le(\ln\gamma)^x$ όπου $\gamma\in(1,+\infty)$, να δείξετε ότι $\gamma=e^e$.

(μονάδες 5)

Δ.3. α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει εξίσωση $\varepsilon: y=\dfrac{1}{2e}\cdot x$.

(μονάδες 4)

β) Ένα σημείο M με $x_{\mathrm{M}}>0$ κινείται στην παραπάνω εφαπτομένη και η τετμημένη του, αυξάνεται με ρυθμό $x_{\mathrm{M}}'(t)=2\ {cm}/{\sec}$. Αν A,B είναι αντίστοιχα οι προβολές του σημείου M στους άξονες $x'x,\ y'y$ αντίστοιχα και $\mathrm{O}(0,0)$ η αρχή των αξόνων, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου OAMB, την χρονική στιγμή t_0 για την οποία ισχύει $x_{\mathrm{M}}(t_0)=2x_0$, όπου x_0 η τετμημένη του σημείου καμπής της C_f.

(μονάδες 5)

Δ.4. Αν ισχύει $0<\alpha<\beta\le e\sqrt{e}$, να δείξετε ότι: $\dfrac{4e}{\beta-\alpha}\cdot\int_\alpha^\beta f(x)dx<\alpha+\beta$.

(μονάδες 5)

Ευχόμαστε επιτυχία!

Σύγχρονη Τομή — Το μέλλον ξεκινάει... σήμερα	**ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ**	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΟΥΖΑΣ
	ΤΜΗΜΑ	
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	14ο Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$ με $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$.

Μονάδες 5

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α3. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται ″1–1″;

Μονάδες 2

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 3

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha:\mathbb{Z}^*\to\mathbb{R}$. **Σ Λ**

β) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα. **Σ Λ**

γ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ημx}{x} = 1$. **Σ Λ**

δ) Αν f(x) συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\int_α^β f(x)dx > 0$ για κάθε $α, β \in \mathbb{R}$. **Σ Λ**

ε) Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ. **Σ Λ**

Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ Β:</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x \in (0, +\infty)$.

Β1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 6

Β2. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_1^e f(x)dx$.

Μονάδες 4

Β5. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1.**, **Β2.**, **Β3.** να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, 2 φορές παραγωγίσιμη, κοίλη για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+ln2}{x}=\frac{1}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο A(0, f(0)) είναι η y = $\frac{1}{2}x-ln2$

Μονάδες 3

Γ2. Αν F είναι μια παράγουσα της f με F(0) = 0, τότε να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4(e^x-1)}{4F(x)-x^2-4f(0)x}$

Μονάδες 4

Γ3. **α)** Αν κ < λ να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in$ (κ, λ) τέτοιο ώστε $3f'(x_0)=2f'(\kappa)+f'(\lambda)$

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in$ (κ, λ) με $\xi_1 < \xi_2$ ώστε να ισχύει:

$2(x_0-\kappa) \cdot f''(\xi_1)=(\lambda-x_0) \cdot f''(\xi_2)$, όπου x_0 το σημείο του προηγούμενου ερωτήματος

Μονάδες 3

Γ4. **α)** Να δείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)$, για κάθε x∈ $\mathbb{R}$

Μονάδες 3

β) Αν $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=e^{f(x)-x}$, για κάθε x∈ $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι $f(x)=x-\ln(e^x+1)$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ5. Να λυθεί η εξίσωση: $(x-1)^2=\ln\frac{e^{(x^2+1)}+1}{e^{2x}+1}$, x∈ $\mathbb{R}$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και G μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$.

Υποθέτουμε ότι:

- $G(1)=1=-f(1)=\dfrac{f'(1)}{2}$
- $G(x)f(x)f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$
- $\int_1^2\left(f^2(x)+G(x)f'(x)\right)dx=\dfrac{7}{8}$ και $\int_1^2\left(1-\dfrac{f'(x)G(x)}{f^2(x)}\right)dx=-1$
- $f\left(D_f\right)=(-\infty,0)$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η G είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(2)=-\dfrac{1}{4}$ και $G(2)=\dfrac{1}{2}$

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιος ώστε $f^2(\xi)-f'(\xi)G(\xi)=\dfrac{\pi f^2(\xi)\eta\mu\left(-\dfrac{\pi\xi}{2}\right)}{2}$

Μονάδες 4

Δ4. α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2+2

β) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 f(x)dx+\int_{f(1)}^{f(2)}f^{-1}(x)dx=\dfrac{1}{2}$

(Θεωρείστε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής)

Μονάδες 3

γ) Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}f^{-1}(x)$

(Θεωρείστε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής)

Μονάδες 4

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\int_2^{101}f(x)dx<\int_3^{100}f(x)dx$

Μονάδες 3

Ευχόμαστε επιτυχία!

~ 4 ~

15ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΤΡΙΩΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδειχθεί η παρακάτω πρόταση:

Έστω συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η *f* είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση F είναι αρχική ή παράγουσα της f σε ένα διάστημα Δ**;**

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Κριτηρίου Παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\left(x^3+x-1\right)\right]$ δεν είναι καλώς ορισμένο.

β) Η συνάρτηση f με παράγωγο $f'(x)=x^{2022}+x^{2024}$, $x\in\mathbb{R}$ έχει κρίσιμο σημείο το x=0.

γ) Αν μία συνάρτηση είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και για κάποιο $x_0\in(\alpha,\beta)$ ισχύουν ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,x_0) και γνησίως φθίνουσα στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

δ) Αν μία συνάρτηση είναι ασυνεχής σε κάποιο x_0 του πεδίου ορισμού της , τότε η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης.

ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ και η συνεχής συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει δύο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να βρείτε την f^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 7

B2. Να ορίσετε τη συνάρτηση fog.

Μονάδες 6

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[e^{-f^{-1}(x)} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{f^{-1}(x) + 2022} \right]$.

Μονάδες 6

B4. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} -(fog)(x) & , \ \alpha\nu \ x \le -1 \\ f^{-1}(x) & , \ \alpha\nu \ x > -1 \end{cases}$. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης h.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x \cdot \ln x = x + 1$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα που είναι μεγαλύτερη του e.

Μονάδες 7

Γ2. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x \cdot f'(x) + x \cdot f(x) + e^{-x} = 0$ για κάθε $x > 0$. Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι $f(1) = \frac{1}{e}$, τότε

i. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \frac{1 - \ln x}{e^x}, x > 0$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδειχθεί ότι $\frac{1}{2e} \le \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx \le \frac{1 + \ln 2}{2\sqrt{e}}$. (Μονάδες 6)

Μονάδες 12

Γ3. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = x \cdot \ln x - x - 1$. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$ είναι κατά $\left(\frac{e^2 - 7}{4} + e \right)$ τ.μ. μεγαλύτερο από το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f την άξονα xx' και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

Μονάδες 6

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ και η συνάρτηση h με

$h(x)=\ln[f(x)]+\frac{x^2}{2}$ για κάθε $x>0$ για την οποία ισχύει $h''(x)>2023$ για κάθε $x>0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leq f(\alpha)+f(\beta)$, για κάθε $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Δ3. Αν $e^4f(3)=f(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(x_0)=-x_0f(x_0)$.

Μονάδες 5

Δ4. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2022$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(\ln x)}{x^2}$.

Μονάδες 4

Δ5. Αν υπάρχει $x_0>0$ στο οποίο η f παρουσιάζει μέγιστο , τότε η f είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Σύγχρονη Τομή

Το μέλλον ξεκινάει... σήμερα

16ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ – ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ :

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 3

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, τότε $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.»
Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως **αληθή** ή **ψευδή** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 1-3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε «1 – 1» συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.

β) Αν η συνάρτηση $f: A \to R$ έχει ελάχιστο τον αριθμό m, τότε υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $f(x_0)<m$.

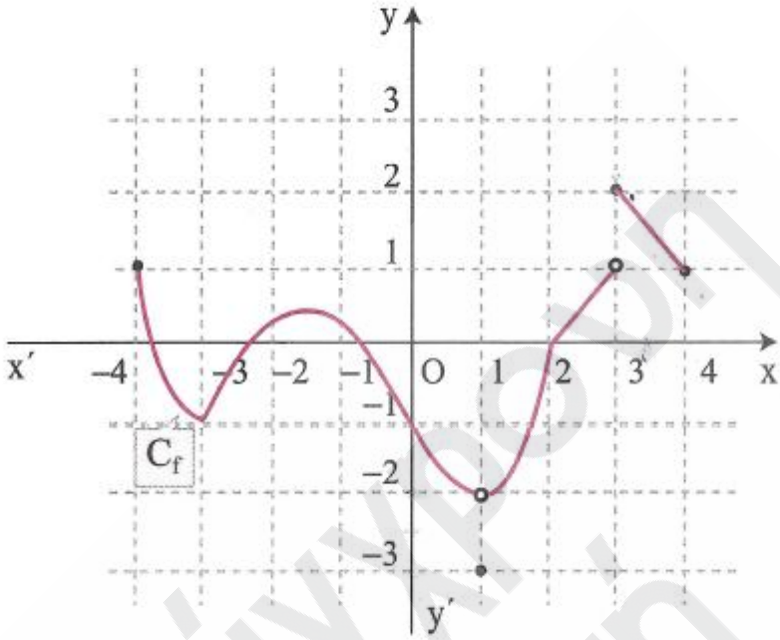
γ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta=(\alpha,\beta)$, τότε το σύνολο τιμών της f στο Δ είναι : $f(\Delta)=\left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω από τη C_f, εκτός από το σημείο επαφής.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ’ ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\beta)-G(\alpha)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β
Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 2

Β2. Να εξετάσετε αν η f παίρνει την τιμή $-\frac{5}{2}$.

Μονάδες 2

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x\to 1} f(2x)$ ε) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 10

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Β5. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(3{,}5+h)-f(3{,}5)}{h}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ
Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

- $f(1)+f(-1)=0$ και
- $f'(x)=\sqrt{16+f^2(x)}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f''(x)=f(x)$ (*μονάδες 2*) και στη συνέχεια να δείξετε ότι η συνάρτηση $K(x)=\left[f'(x)+f(x)\right]\cdot e^{-x}$ είναι σταθερή στο R (*μονάδες 2*).

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

Μονάδες 4

Γ3. Αν επιπλέον ισχύει $f(0)=0$ να δείξετε ότι $f(x) = 2\left(e^{x} - e^{-x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την αντίστροφη συνάρτηση της f.

Μονάδες 6

Γ5. Να δείξετε ότι $\int_{0}^{3} \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}\right)dx = 3\ln 2 - 1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\left(e^{(x^2+1)h}-1\right)\left(f(x)-f(x+2h)\right)}{4h^2} = xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 4**

Δ2. Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτές της. **Μονάδες 5**

Δ3. Σημείο $M(x, f(x))$, $x>0$ κινείται στη γραφική παράσταση της f. Αν N είναι το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$ και K, Λ οι προβολές των N, M στον άξονα $x'x$, να προσδιορίσετε τις κορυφές K, Λ, M, N ώστε το εμβαδόν του τετράπλευρου ΚΛΜΝ να είναι μέγιστο. **Μονάδες 5**

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{(x^2+1)(e^x-1)}{x^2-x+1}=x$. **Μονάδες 5**

Δ5. Να υπολογίσετε:

i. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x+1)f(x)}{2\eta\mu x+3}$. **Μονάδες 3**

ii. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)f(x)}$ **Μονάδες 3**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Επιμέλεια Θεμάτων:
Ανδρέας Βούζας
Μαθηματικός
M.Sc. Operational Research
M.Sc. Information Systems
avouzas.webmail.com

17ο ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$. *Μονάδες 8*

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. *Μονάδες 4*

Α3. Σε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε την ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο $+\infty$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ
1. $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$	Α. $y=2$
2. $f(x)=-x+1+\frac{1}{e^x}$	Β. $y=x-1$
3. $f(x)=2+\frac{3}{x-2}$	Γ. $y=-x+1$
	Δ. $y=x$
	Ε. $y=-x$

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ που να σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{3}$. *Μονάδες 2*

β. Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δεν μηδενίζεται και δεν διατηρεί πρόσημο, τότε δεν είναι συνεχής. *Μονάδες 2*

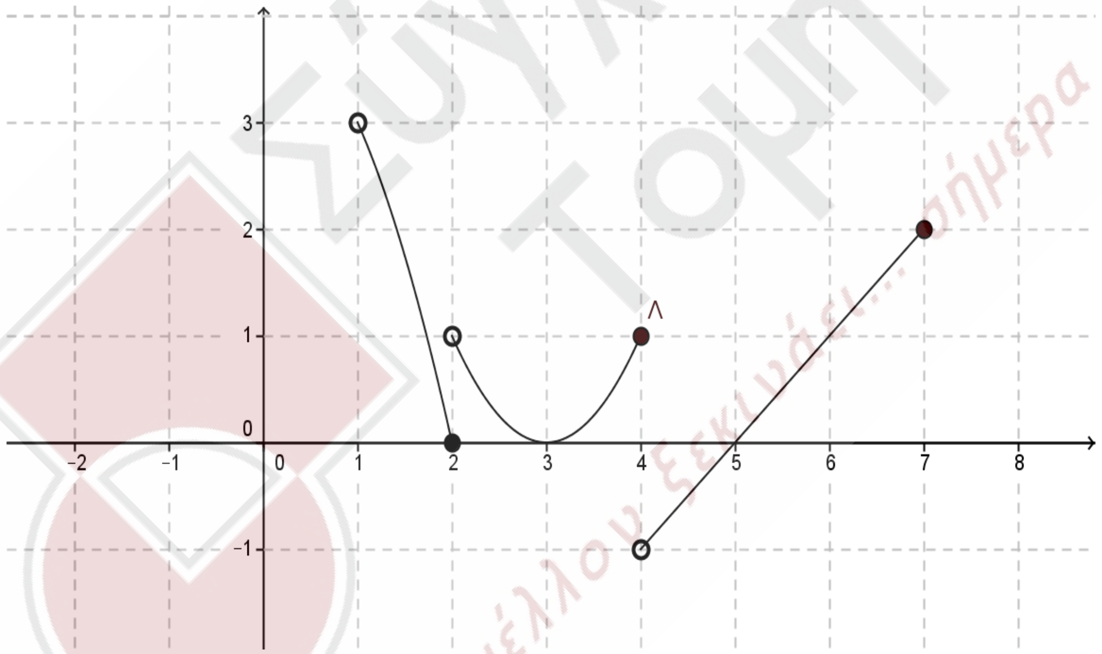
γ. Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $x>|\eta\mu x|$. *Μονάδες 2*

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega)=\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$. *Μονάδες 2*

ε. Αν οι συναρτήσεις f,g ορίζονται στο $\mathbb{R}$ με $|f(x)|=|g(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε ισχύει ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. *Μονάδες 2*

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



B1. Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f καθώς και τα σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής. *Μονάδες 5*

B2. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια δικαιολογώντας την απάντησή σας.

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{x-4}$. *Μονάδες 3 x 2 = 6*

B3. Δίνεται ακόμα η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\sqrt{x^2-7x}-\alpha x$.

α) Να βρείτε τον α ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης της f με την g. *Μονάδες 7 + 7 = 14*

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνονται οι συναρτήσεις: $h(x)=e^x+x-1$, $f(x)=xe^x+\alpha$ και $g(x)=-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $h(x)=0$ ***(μονάδες 2)*** και να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης h ***(μονάδες 3).*** ***Μονάδες 5***

Αν οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g, των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα δέχονται, σε κοινό τους σημείο, κοινή εφαπτομένη (ε) της μορφής $y=\lambda x$, τότε:

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$ και $\beta=-\frac{3}{2}$. *Μονάδες 7*

Γ3. Να βρείτε το εμβαδόν E_1 του χωρίου, που περικλείεται από την γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g, την ευθεία $y=x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=\ln 2$. *Μονάδες 6*

Γ4. Να βρείτε όλα τα ζεύγη παράλληλων ευθειών που η μια ευθεία να είναι ασύμπτωτη της C_f και η άλλη ασύμπτωτη της C_g. *Μονάδες 7*

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ που δεν έχει κρίσιμα σημεία και επαληθεύει τη σχέση $e^4 f(3)=f(1)$. Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\ln\left[f(x)\right]+\frac{x^2}{2}$ για κάθε $x>0$, για την οποία ισχύει $h''(x)\geq 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή **(μονάδες 3)** και γνησίως φθίνουσα **(μονάδες 4).** *Μονάδες 7*

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x-1)-f(x-1)=f'(x^2-3x+2)-f(x^2-3x+2)$. *Μονάδες 6*

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f'(x_0)=-x_0 f(x_0)$. *Μονάδες 6*

Δ4. Για το x_0 του ερωτήματος **Δ3.** και με την προϋπόθεση ότι η h'' είναι συνεχής στο [1,3] να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x_0)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $\int_1^{x_0}(x-1)h''(x)\,dx=(1-x_0)\cdot h'(\xi)$. *Μονάδες 6*

Καλό βαθμό!

18ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ- ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι :

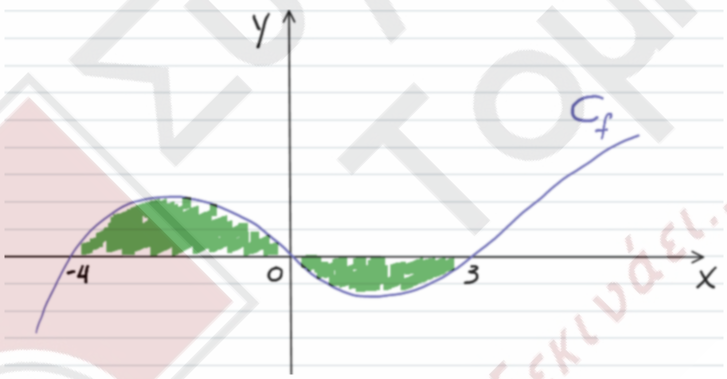
- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x)=F(x)+c , c ,είναι παράγουσες της f στο Δ.
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x)=F(x)+c , c ϵ R.

Μονάδες 5

Α2.Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 5

Α3.Στο παρακάτω σχήμα το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι ίσο με:



i. $\int_{-4}^{3} f(x)dx$ ii. $\int_{-4}^{0} |f(x)|dx$ iii. $\int_{-4}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{3} f(x)dx$ iv. $\int_{-4}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx$

Μονάδες 5

Α4. Να σημειώσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις.

α. Έστω f συνεχής στο [α, β]. Αν F παράγουσα της f στο [α, β] τότε θα είναι :

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = F(\alpha) - F(\beta).$$

β. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

γ. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [α,β]$. Το εμβαδόν Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f ,g και τις ευθείες x=α και x=β είναι $E(Ω)= \int_α^β \big(f(x) - g(x)\big)dx$

δ. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 , της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

ε. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\int_α^β f(x)dx = 0$ τότε $α = β$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Β1.Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία , τα ακρότατα , την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f.

Μονάδες 3+2+2+1=8

Β2.Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και τα όρια:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ Μονάδες $1 + 2 = 3$

Με βάση τα ερωτήματα Β1, Β2 να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Μονάδες 4

Β4.Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα

i. στην C_f και τον άξονα x'x.
ii. στην C_f , τον άξονα x'x και τις ευθείες x=-2 και x=2.

Μονάδες 5+5=10

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{\frac{α}{x}}, x > 0$ για την οποία ισχύει, $f(x) \geq e^{α}$, για κάθε $x > 0$

Γ1.Να δείξετε πως α=1. (Μονάδες 6)

Γ2. Να βρείτε την μονοτονία και το σύνολο τιμών της f.

(Μονάδες 6)

Γ3. Έστω συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$, $x > 0$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα C_g , τον άξονα x και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$

(Μονάδες 6)

Γ4. Να αποδείξετε πως $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx > e \cdot \ln 2$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και κυρτή και η $g(x) = \eta\mu x$, $x \epsilon [0, \pi]$.

Δ1.Να βρεθούν οι εφαπτομένες τις C_g που διέρχονται από το σημείο $A(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(Μονάδες 6)

Δ2.Αν (ε_1) $y=x$ και (ε_2) $y=-x+\pi$ οι εφαπτομένες του Δ1,να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g και τις παραπάνω ευθείες.

(Μονάδες 8)

Εάν επιπλέον ισχύει $\int_{f(0)}^{f(4)} (5e^{x^2} + x^{2024})dx = 0$ τότε να δείξετε ότι:

Δ3.Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,4)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ακρότατο και να προσδιορίσετε το είδος του.

(Μονάδες 6)

Δ4. Ισχύει $\int_0^{x_0} x \cdot f''(x)dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (f(x) - f(4)) \cdot g(t)dt, \forall\, x \in \mathbb{R}$, *όπου* x_0 αυτό του ερωτήματος Δ3.

(Μονάδες 5)

19ο Διαγώνισμα προσομοίωσης στα Μαθηματικά προσανατολισμού 2023-2024

Θέμα Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μια πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού έχει πάντα σημείο καμπής.

β) Αν μια συνάρτηση f ορίζεται στο x_0 τότε η $x=x_0$ δεν μπορεί να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτή της.

γ) Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε μπορεί να υπάρχει $x_0\in\Delta$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

δ) Αν συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, τότε $f'(x_0)=0$.

ε) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, έχει μόνο μια παράγουσα στο Δ.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ και $g(x)=\ln x$.

Β1. Να βρείτε τη σύνθεση της συνάρτησης g με την συνάρτηση f δηλαδή την $f\circ g$.

Μονάδες 6

Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x}$ με $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$,

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης h, δηλαδή την h^{-1}.

Μονάδες 6

Αν $h^{-1}(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$ με $x\neq 1$

Β3. Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης h^{-1} σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και το σύνολο τιμών της h^{-1}.

Μονάδες 7

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h^{-1}(x)=\alpha$ με α πραγματικό δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2^x$ και $g(x)=-x^2+2x+1$.

Γ1. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινά σημεία στο διάστημα $(0,1)$**,** να αποδείξετε ότι υπάρχει ζεύγος σημείων Μ, Ν με $M(\xi,f(\xi))$ και $N(\xi,g(\xi))$, $\xi\in(0,1)$ στα οποία οι C_f, C_g δέχονται παράλληλες εφαπτόμενες.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η διαφορά $f(x)-g(x)$ γίνεται ελάχιστη στο $x=\xi$.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι $2^\xi+\xi^2<2\xi+1$.

Μονάδες 3

Γ4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία τα $A(0,1)$ και $B(1,2)$.

Μονάδες 4

Γ5. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν τα όρια

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f(x)}{f'(x)-g'(x)}$

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Έστω οι συναρτήσεις f,g που είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύει

- Η g είναι κυρτή
- g(0)=1
- $f'(x)+g'(x)=f(x)-g(x)-2$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε α, $\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ και $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει

$$g(x)-g(\alpha)\le g'(\beta)(x-\alpha)$$

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι $2\int_\alpha^\beta g(x)dx<g'(\beta)(\beta-\alpha)^2+2g(\alpha)(\beta-\alpha)$.

Μονάδες 6

Δ3. Αν ισχύει $f(x)=e^x+\int_0^1 xf(x)dx$, $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$f(x)=e^x+2 \text{ , } x\in\mathbb{R} \text{ και } g(x)=e^{-x} \text{ , } x\in\mathbb{R}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<0<x_2$ που είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)+g(x)=\alpha$, $\alpha>4$.

Μονάδες 6

Ευχόμαστε Επιτυχία!

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
20^{Ο} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ –ΘΕΜΑΤΑ (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α3. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο R. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

β) Αν μία συνάρτηση είναι κυρτή σ΄ ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται ¨πάνω¨ από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

γ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=G(\alpha)-G(\beta)$.

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x)\neq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι ¨1-1¨ στο Δ.

ε) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(a,b]\to R$ me $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο β το $f(\beta)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-4\lambda x$.

1. Αν ισχύει $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in R$, να αποδείξετε ότι $\lambda=\frac{1}{4}$.

Μονάδες 6

2. Αν $\lambda=\frac{1}{4}$

   i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(e^x-x-2\right)=1$ έχει ακριβώς 2 πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

   ii) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Μονάδες 3

   iii) Αν $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-3}+\frac{f(\alpha)-1}{x-1}=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,3)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, με $f(x)=e^x-\int_0^1 e^{1-x}f(x)\,dx$, για κάθε $x\in R$.

1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=e^x-1$, $x\in R$.

Μονάδες 5

2. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=f(x)+x$ αντιστρέφεται και να βρείτε το πρόσημο της g^{-1}.

Μονάδες 8

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης g^{-1}, του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=e$.

Μονάδες 5

4. Αν για μια συνάρτηση $h:R\to R^*$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\int_{h(1)}^{h(2)} f(x)dx=0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ έτσι ώστε $h'(\xi)=0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, με $f(1)=1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{f(x)}{x}$, για κάθε $x>0$.

1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$, $x>0$.

Μονάδες 3

2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής.

Μονάδες 5

3. Να αποδείξτε ότι $f(x)<\frac{f(x-1)+f(x+1)}{2}$, για κάθε $x>\sqrt{e}+1$.

Μονάδες 5

4. Αν G μία παράγουσα της g στο $(0,+\infty)$, όπου $g(x)=\frac{xf(x)+x-1}{x^2+1}$ με $x>0$ τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $G(x)-G\left(\frac{1}{x}\right)=\ln x$, $x>0$.

Μονάδες 4

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e G(x)\,dx>\int_{1/e}^{1}\frac{G(x)}{x^2}\,dx$.

Μονάδες 3

iii) Να αποδείξετε ότι η $G'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ και να βρείτε τη μονοτονία της G.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

21^{Ο} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ –ΘΕΜΑΤΑ (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ,η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ τότε:

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c,\ c\in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα $c\in \mathbb{R}$ της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c,\ c\in \mathbb{R}$

(Μονάδες 7)

Α2. Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$ »

α). Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. **(Μονάδα 1)**

β). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. **(Μονάδες 3)**

Α3. Έστω $f:\mathrm{A}\in\mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο Α.

α) Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών της f ; Πως συμβολίζεται;

β) Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{A}=\left[\alpha,+\infty\right)$, γράψτε το σύνολο τιμών της.

γ) Αν η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathrm{A}=\left[\alpha,\beta\right]$, γράψτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 4)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την ένδειξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α). Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ τότε η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

β). Για κάθε μη μηδενική συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

γ). Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε κατ΄ ανάγκη δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

δ). Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

ε). Αν μία συνάρτηση f είναι κοίλη σ΄ ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής της.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β΄

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x + x^2, 0<x\leq 1 \\ x+x^2, x\leq 0. \end{cases}$

Β1.Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

(Μονάδες 5)

Β2. Να αποδείξετε ότι η f έχει τρία ακριβώς κρίσιμα σημεία.

(Μονάδες 6)

Β3. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x)=2+2e$

(Μονάδες 6)

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\dfrac{2\eta\mu x}{\eta\mu^2 x+1}\right)$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ΄

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

Ισχύουν: $f'(x)\geq \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}+1$ $για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}\ και$ $f(0)=\dfrac{1}{2}ln2$.

Γ1. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

(Μονάδες 8)

Γ2. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

(Μονάδες 5)

Γ3. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x_0)=0$.

(Μονάδες 5)

Γ4. Αποδείξτε ότι $f(1)\geq \ln(\mathrm{e}\sqrt{e^2+1})$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ΄

Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχή και γνησίως μονότονη, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(2,2)$.

Θεωρούμε επίσης παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Για τις συναρτήσεις f,g ισχύουν:

- $g'(x)=f^2(x)-4f(x)+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $\int_0^1\left(f(x)-2\right)^2dx=\dfrac{7}{3}$
- $g(1)+g(0)=\dfrac{4}{3}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g(0)=0$ και $g(1)=\dfrac{4}{3}$.

(Μονάδες 4)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η g στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 2]$ και τα κοίλα πάνω στο $[2, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

i) $g(x) \leq 3x$ για κάθε $x \leq 2$.

(Μονάδες 5)

ii) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^3}{g(x)} dx < \frac{7}{9}$

(Μονάδες 4)

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση :

$$e^{x-2} + g(x) + x = 3 + g(2)$$

(Μονάδες 6)

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
22ο Διαγώνισμα **ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΜΑΙΟΥ**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

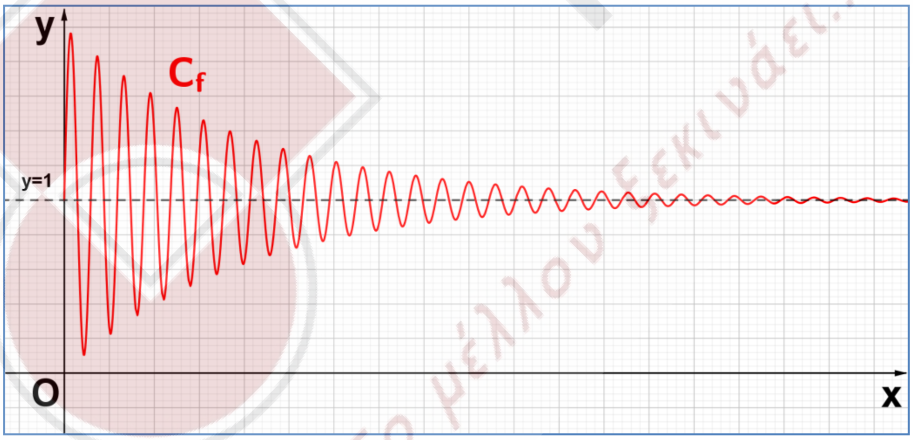
Επιμέλεια : Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. **(Μονάδες 6)**

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle. **(Μονάδες 4)**

Α3. **α)** Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-1)=0$ και η οποία έχει άπειρα κοινά σημεία με την ευθεία $y=1$, όταν το x τείνει στο $+\infty$:



Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη την παρακάτω πρόταση:

«Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$ στο $+\infty$».

Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

(Μονάδα 1 για το χαρακτηρισμό και Μονάδες 2 για την αιτιολόγηση)

(Μονάδες 3)

β) **Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη την παρακάτω πρόταση**:
«Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο IR τότε $f''(x)>0$ για κάθε $x \in IR$.»
Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.
(Μονάδα 1 για το χαρακτηρισμό και Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)
(Μονάδες 4)

Α4. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντιστοίχως, τι ονομάζεται σύνθεση της συνάρτησης f με την g; Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της; **(Μονάδες 2)**

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
(**χωρίς αιτιολόγηση**).

α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $y=-x$. **(Μονάδες 2)**

β) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση άρτιου βαθμού έχει οριζόντια εφαπτομένη. **(Μονάδες 2)**

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα [α,β] με $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ και δεν έχει ρίζες στο (α,β), τότε η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής στο [α,β]. **(Μονάδες 2)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x-\beta}{x-\alpha}$, όπου $x \in IR-\{\alpha\}$ και $\beta \neq \alpha^2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης f και ότι ισχύει $f^{-1}=f$.
(Μονάδες 6)

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε επιπλέον γνωστό ότι η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(3,5)$ είναι ίση με -3:

Β2. Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=1$. **(Μονάδες 5)**

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
(Μονάδες 5)

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. **(Μονάδες 9)**

ΤΕΛΟΣ 2ης ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x+\alpha & , \ \alpha\nu \quad -\pi\le x\le 0 \\ \gamma e^{\beta x} & , \ \alpha\nu \quad 0<x\le 1 \end{cases}$, $\alpha,\beta,\gamma\in IR$, της οποίας η γραφική παράσταση δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $A\left(0,f(0)\right)$, την ευθεία με εξίσωση $y=x+1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma=1$ **(Μονάδες 6)**

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. **(Μονάδες 5)**

Γ3. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x^2\right)-1}{\sqrt{1-x^2}-1}$ **(Μονάδες 4)**

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε επιπλέον γνωστό ότι η f είναι κυρτή:

Γ4. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x+3)}{x+1-f(x)}$. **(Μονάδες 5)**

Γ5. Ένα υλικό σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t_0=0$ από ένα σημείο $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ με $x_0<0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, με $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\ge 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\ge 0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και για την οποία για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύουν $f(x)\ge f\left(\dfrac{1}{e}\right)$ και $\dfrac{f(x)}{x}=f'(x)-e$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\ln x^e$, $x>0$, είναι σταθερή και ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=e\cdot x\cdot\ln x$, $x>0$. **(Μονάδες 6)**

Δ2. Να μελετήσετε τη μονοτονία και την κυρτότητα της συνάρτησης f. **(Μονάδες 4)**

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε γνωστό ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\dfrac{\ln(x+6)}{\ln x}$ είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$:

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (1, +∞).

(Μονάδες 5)

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $\mathrm{M}(\xi, g(\xi))$ να είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y=x+1$.

(Μονάδες 5)

Δ5. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{\ln(f(x)+10)}{\ln(f(x)+4)}=\dfrac{\ln(f(x)+9)}{\ln(f(x)+3)}-1$, $x>0$.

(Μονάδες 5)

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρηση σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια , διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε διορθωτικό (blanco) ούτε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά την διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Ενενήντα (90') λεπτά μετά από τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ 4ης ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

23ο Διαγώνισμα ΠΕΜΠΤΗ 11ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Επιμέλεια : Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Α2. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Α3. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όπου f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 ;

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στα σημεία καμπής της ‘’διαπερνά’’ την C_f

β) Οι κανόνες de l’ Hospital δεν ισχύουν για πλευρικά όρια.

γ) Οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ’ ένα διάστημα Δ είναι τα κρίσιμα σημεία της f και τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

δ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ’ ένα εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο αυτό είναι οριζόντια.

ε) Για κάθε αρνητικό αριθμό x ισχύει ημ$x < x$

Μονάδες 8+4+3+10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$ και $h(x)=\ln x$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = goh$

Μονάδες 5

Έστω $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$, $x\in(0,\ \mathrm{e})\cup(\mathrm{e},\ +\infty)$

Β2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

Μονάδες 8

Β3. Να εξετάσετε αν ο αριθμός -1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f

Μονάδες 4

Β4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(1,\ \sqrt[3]{\mathrm{e}^2}\right)$ τέτοιος ώστε

$\ln x_0=\left(1-\ln x_0\right)\sqrt{x_0}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f: [2, 5] \to \mathbb{R}$ με $f(x)=2x^3-21x^2+60x$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\Delta=[25, 52]$

Μονάδες 6

Γ3. Δίνεται επιπλέον ότι η συνάρτηση $g(x)=f^{-1}(x)$ είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

Να βρεθεί:

i) η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $A(45, g(45))$

Μονάδες 7

ii) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απ’ την C_g τις ευθείες $x=25$, $x=52$ και τον άξονα των x

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \sqrt{9 - x^2}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Δ3. Να χαράξετε την C_f

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $4\sqrt{2} < \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x < 6$

Μονάδες 8

ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

24^{o} Γενικό διαγώνισμα στην νέα ύλη

Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 3 ώρες(180 Λ)

ΘΕΜΑ Α

Α$_1$. Να αποδείξετε ότι:

α) Για κάθε $x>0:(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}, \alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}, \nu\in\mathbb{N}$, με $\nu>1$: $\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}$.

γ) Για κάθε $x\neq 0, \nu\in\mathbb{N}^*$: $\left(x^{-\nu}\right)'=-\nu x^{-\nu-1}$. ***Μονάδες 3 + 3 + 2 = 8***

Α$_2$. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών. ***Μονάδες 3***

Α$_3$. Δίνεται ο ισχυρισμός: « Αν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες σε σύνολο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$ τότε θα ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=0$ ».

Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως Αληθή ή Ψευδή ***(1 μονάδα)*** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας ***(3 μονάδες).*** ***Μονάδες 4***

Α$_4$. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε δεν θα είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

2. Αν η συνάρτηση $f+g$ έχει πεδίο ορισμού το $[0,1]$ τότε και η f και η g έχουν πεδίο ορισμού το $[0,1]$.

Μονάδες 2

3. Για τη συνάρτηση $f(x)=-\sqrt{x}-100,\ x\geq 0$ δεν ορίζεται η $f\circ f$.

Μονάδες 2

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν το x_0 είναι θέση τοπικού μεγίστου, τότε υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο (α, x_0) και γνησίως φθίνουσα στο (x_0,β).

Μονάδες 2

5. Στο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu x-1}$ εμφανίζεται απροσδιόριστη μορφή.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες γνωρίζετε ότι:

- $f(x)=\dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$, $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
- Η g είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $-\dfrac{2}{9}x^2-x+2\le g(x)\le\dfrac{2}{9}x^2-x+2$

Β₁. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to1}f(x)$. ***Μονάδες 7***

Β₂. **i)** Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $x_0=0$.

ii) Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $g'(0)=-1$. ***Μονάδες 3 + 4 = 7***

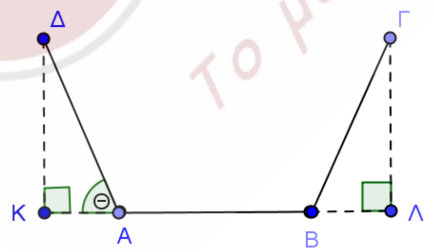
Για $\lambda=2$

Β₃. Να βρείτε ένα κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g στο οποίο να δέχονται κοινή εφαπτόμενη. ***Μονάδες 5***

Β₄. Αν γνωρίζετε ότι η g είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{3}{2},2\right]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1\in\left[\dfrac{3}{2},2\right)$ για το οποίο ισχύει: $g(x_1)=\dfrac{(2x_1-3)f(x_1)}{2-x_1}$. ***Μονάδες 6***

ΘΕΜΑ Γ

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κάθετη διατομή ενός καναλιού, που θέλουμε να κατασκευάσουμε, η οποία είναι το ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ=ΑΔ=ΒΓ=2m$. Τα τμήματα $ΔΚ, ΓΛ$ είναι ύψη του τραπεζίου και η γωνία $Δ\hat{Α}Κ=\theta$ μεταβάλλεται με $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.



Γ₁. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ, με $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, το εμβαδόν της διατομής $ΑΒΓΔ$ είναι ίσο

$E(\theta)=4ημ\theta(1+συν\theta)$. ***Μονάδες 5***

Γ₂. i. Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή της γωνίας θ για την οποία το εμβαδόν της κάθετης διατομής να ισούται με $\frac{15}{4}m^2$. ***Μονάδες 7 + 4 = 11***

Γ₃. Αν γνωρίζετε ότι, για $0<\theta<\frac{\pi}{2}$,το ύψος $\Delta K=\upsilon(t)$ αυξάνεται συναρτήσει του χρόνου t με ρυθμό $0{,}1\,m/sec$, ενώ η πλευρά $A\Delta$ παραμένει $2m$,τότε:

i. Να αποδείξετε ότι γωνία θ αυξάνεται με αύξοντα ρυθμό.

ii. Να αποδείξετε ότι την χρονική στιγμή στην οποία το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται, ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ ισούται, αριθμητικά, με τον ρυθμό μεταβολής του ΔK . ***Μονάδες 5 + 4 = 9***

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[0,+\infty)$, παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $(0,+\infty)$ για την οποία γνωρίζετε ότι:

- Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $e^{f(x)}-f(x)=e^x$.
- $f(\ln(e-1))=1$

Δ₁. i. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ ***(2 μονάδες)*** και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. ***(4 μονάδες)***.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)>x$. ***Μονάδες 6 + 3 = 9***

Δ₂. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} ορίζεται στο $[0,+\infty)$ με $f^{-1}(x)=\ln(e^x-x),\ x\geq 0$. ***Μονάδες 4***

Δ₃. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}-3\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{f^{-1}(x)}}{f'(x)}$ ***Μονάδες 4***

Δ₄. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(xe^{f(x)}-xf(x)\right)+f(x)=\ln x+f^{-1}(2)\cdot f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$.

ii . Αν x_0 είναι η λύση της εξίσωσης του ερωτήματος Δ₄ i, να αποδείξετε ότι $x_0<\dfrac{f^{-1}(2)f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$

Μονάδες 5 + 3 = 8

25ο Διαγώνισμα

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι $f'(x\ ) = 0$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

Μονάδες 4

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για μία συνάρτηση f σε ένα διάστημα [α, β], τότε η f είναι αντιστρέψιμη.

β. Αν η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = x_0$, τότε το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

γ. Έστω $f\colon[\alpha,\alpha+1] \to [\alpha+2,\ \alpha+3]$ και $g\colon[\alpha,\alpha+1] \to [\alpha+2,\ \alpha+3]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε δεν ορίζεται η σύνθεση της f με τη g.

δ. Αν η f ορίζεται στο [α, β] και $f(\alpha)f(\beta) < 0$, τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ε. Η συνεχής συνάρτηση $f\colon\Delta \to \mathbb{R}^*$ διατηρεί πάντα σταθερό πρόσημο.

Μονάδες 10

Α4. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:

«Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο $\Delta = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Τότε η f είναι σταθερή στο Δ»

α. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ)

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4 (1+3)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x}+1, & x>0\\ \sqrt{x^2+1}-\alpha x, & x\le 0\end{cases}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Οx'.

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha=-1$.

Μονάδες 6

Β2. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης τιμής στο διάστημα $[-1,1]$.

Μονάδες 4

Β3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 8

Β4. **α.** Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της f και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 4

β. Να εξηγήσετε από τη γραφική παράσταση γιατί ο ρυθμός μεταβολής της f στο 0 είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό μεταβολής της f στο -1, σχεδιάζοντας πρόχειρα τις εφαπτομένες στα σημεία αυτά.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & x>0\\ x^3, & x\le 0\end{cases}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

Έστω $f^{-1}(x)=\begin{cases}e^x-1, & x>0\\ -\sqrt[3]{-x}, & x\le 0\end{cases}$

Γ2. Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που σχηματίζει η $C_{f^{-1}}$ με τον x'x και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η ευθεία $x=\alpha$ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Μονάδες 6

Γ4. Έστω ένα κινητό ξεκινάει από το σημείο Α(-1, -1) και κινείται κατά μήκος της καμπύλης C_{-1}. Η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό $x'(t) = 2t\frac{μονάδες}{sec}, t > 0$. Να βρείτε σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο σημείο Β(1, ln2); Ποιος θα είναι τότε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισχύει:

$$f'(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της f.

Μονάδες 6

Δ2. Αν $f(x) = ln(x^2 + 1),\ \ x \in \mathbb{R}$,

α. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

β. να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε τις τιμές του θετικού αριθμού α, ώστε η εξίσωση $f(x) = f'(\alpha) \cdot f''(\alpha)$ να είναι αδύνατη.

Μονάδες 6

Δ4. Για α >1, να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{2} e^{x} ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right) dx < (2-\alpha)e^{\alpha}$$

Μονάδες 6

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

26ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ
[Κεφάλαια 1, 2, 3 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;

Μονάδες 3

4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό**, αν είναι σωστή ή με **Λάθος** αν είναι λανθασμένη:

α) Εάν $\alpha<\beta$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

β) $\int_\alpha^\beta f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int_{u_2}^{u_1} f(u)du$, όπου f, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, στον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, ισούται με $\int_\beta^\alpha f(x)dx$.

δ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.

ε) Έστω μια συνάρτηση fπαραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(e)=0$
- $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}-e^{\frac{f(x)}{x}}$, για κάθε $x>1$.

Β1. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=-x\cdot\ln(\ln x)$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε τη μονοτονία της f και το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

Β3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(\ln x)^x=\dfrac{1}{m}, x\in(1,+\infty)$ έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $m>0$.

Μονάδες 5

Β4. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2+2)-f(3x)<3x-x^2-2$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει:

$$g'(x)=\frac{1}{3g^2(x)+\varepsilon}$$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όπου ε μία σταθερά στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, στο σημείο της $A(0,g(0))$ έχει εξίσωση:

$$x-2018y+2018=0$$

α) Να βρείτε τον αριθμό ε.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι $g^3(x)+2015\cdot g(x)=x+2016$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

γ) Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι το $\mathbb{R}$, να αποδείξτε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και έχει τύπο $g^{-1}(x)=x^3+2015x-2016$.

Μονάδες 4

δ) Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_g .

Μονάδες 6

ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{g^{-1}(x)}{x\cdot g(x)\cdot(g^2(x)+2015)}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln x}{\alpha x},\alpha\in\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)\le x-1 \text{ για κάθε } x>0$$

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

Μονάδες 4

Δ2. Για $\alpha=1$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

(β) Να δείξετε ότι $f(x)\le\dfrac{1}{e}$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 3

(γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln^2 x+2\lambda x=0$, έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,+\infty)$, για κάθε $\lambda<-\dfrac{1}{e}$.

Μονάδες 4

(δ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $1-\ln\xi=\dfrac{\xi^2}{e^2-e}$.

Μονάδες 5

(ε) Αν η αντίστροφη της f στο $(0, e]$ είναι συνεχής να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = \frac{1}{e}$.

Μονάδες 5

Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου 27ο Γενικό Διαγώνισμα

Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας **20-4-2024**

Θέμα Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β)

Μονάδες 7

Α2. Πότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

α) υπάρχει $x_1\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)=+\infty$

β) υπάρχει $x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $\lim\limits_{x\to x_2} f(x)=-\infty$

γ) υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε αν $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$, να ισχύει $m\le f(x)\le M$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

δ) υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\dfrac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$.

β. Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$.

γ. Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty\right)$$

δ. Αν $f(x)=\ln|x|$, $x\ne0$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x\ne0$.

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν ισχύει ότι $f(x)\ge0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\alpha x+1}{x-2}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-4x+4}$.

Αν η f έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y=2$ στο $+\infty$:

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha=2$.

Μονάδες 3

Β2. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

Μονάδες 7

Β3. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της f^{-1}.

Μονάδες 8

Β4. Αν $\varphi:[3,7]\to\mathbb{R}$ μία γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν $\varphi(3)<7,\ \varphi(7)>7$, να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και φ τέμνονται σε μοναδικό σημείο με τετμημένη μεγαλύτερη του 3 και μικρότερη του 7.

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}\alpha x^x, & 0<x<1\\ \beta, & x=1\\ -\alpha x^2+3x-\alpha, & x>1\end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1,f(1))$.

Μονάδες 5

Γ4. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 5

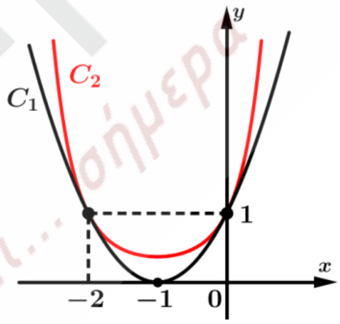
Γ5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\eta\mu(x-1)\left(e^{-3e^{-3}}-e^{-2e^{-2}}\right)}{x^{x+1}-x^x-x^2+x}$.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Έστω οι δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1,C_2 οι οποίες παριστάνουν τις συναρτήσεις $A(x)=f(x)+x$ και $B(x)=g^2(x)$. Γνωρίζουμε ότι:

- $f(x)+x=2\ln|g(x)|+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της A στο $x_0=1$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=4x$.



Δ1. α) Να λύσετε την εξίσωση $\ln g^2(x)-g^2(x)+1=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η C_1 παριστάνει την συνάρτηση A ενώ η C_2 παριστάνει την συνάρτηση B.

Μονάδες 4+4 = 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\le0$ είναι $x\left(f'(x)-1\right)\ge f(x)-1$.

Μονάδες 5

Δ3. Αφού βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ (3 μονάδες), στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$\frac{3}{2}<E(\Omega)<\int_0^1 g^2(x)\,dx-\frac{1}{2}$$

όπου $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία $x=1$ (5 μονάδες).

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{2g'(\xi)}{g(\xi)}=3$.

Μονάδες 4

Καλή τύχη!

28ο ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β) ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιμέλεια : Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

(Μονάδες 10)

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

(Μονάδες 5)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{συνx}{x} = 0$.
2. ισχύει ότι $\int_{α}^{β} f(x)dx + \int_{β}^{α} f(x)dx$ =0
3. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Α = (-∞, 0) ∪ (0 , +∞) με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο Α.
4. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα xx΄ τουλάχιστον μια φορά, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano.
5. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ είναι αντιστρέψιμη στο Δ.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\ln(1-\ln x)$, $x\in(0,e)$

Β1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία της.

(Μονάδες 6)

Β2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

Β3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1-\ln x=\frac{1}{e^{a}}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$.

(Μονάδες 6)

Β4. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, για την οποία ισχύουν :

• $f(1)=0$

• $x^2f'(x)+1=4\int_1^e f(x)dx-xf(x)$, $x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e f(x)dx=\frac{1}{2}$

(Μονάδες 7)

Γ2. Να βρεθεί ο τύπος της f

αν $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x>0$

(Μονάδες 4)

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)\leq x-1$, $x>0$

(Μονάδες 7)

Γ4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , με $g(x)=-x^2$ έχουν μια τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη

(Μονάδες 7)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Έστω συνάρτηση f : (-∞ , 0)→R* ,παραγωγίσιμη στο D_f για την οποία ισχύει : $f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot f(x)$, για κάθε x<0 και $f(-1) = -\frac{1}{e}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = x\cdot e^x$, x<0.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να βρείτε το πλήθος των αρνητικών ριζών της εξίσωσης : $x\cdot e^{x+2}+1=0$

(Μονάδες 7)

Δ3. Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ οι ρίζες της εξίσωσης του Δ2, να αποδείξετε ότι υπάρχουν διακεκριμένα ξ_1 , $\xi_2 \in (-\infty, 0)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot(x_1+1) = f'(\xi_2)\cdot(x_2+1)$

(Μονάδες 7)

Δ4. Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο

$$L = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right)+e^{-x^3+x+1}}{f(x)}\right)$$

(Μονάδες 5)

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

29ο Διαγώνισμα

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Επιμέλεια :Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f\,'$(x)=0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία. **Μονάδες 5**

Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο διάστημα Δ;

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $f: A \to \mathbb{R}$, είναι 1-1 συνάρτηση και f^{-1} είναι η αντίστροφη της, τότε $f^{-1}\big(f(y)\big) = y$ για κάθε $y \in A$.

β. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

γ. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

δ. Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = s(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 δηλαδή είναι $u(t_0) = s'(t_0)$.

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ και $h(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

B1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f = h \circ g$ και να εξετάσετε αν είναι ίση με τη συνάρτηση $t(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}} - 1$. **Μονάδες 4+2**

Θεωρούμε στη συνέχεια ότι $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $x \in [0,1) \cup (1, +\infty)$

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(-2)$. **Μονάδες 3+3**

B3. Να βρείτε τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής της f. **Μονάδες 7**

B4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$F(x) = -2\ln\left|1-\sqrt{x}\right| + 2\left(1-\sqrt{x}\right) - x$, $x \in (1, +\infty)$ είναι αρχική της συνάρτησης f στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $(0,+\infty)$ με $(x-1)f(x)-xlnx=0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{x-1}, 0<x\neq 1\\ \quad 1,\ \ x=1\end{cases}$$

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x=1$.

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι f γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $\xi^{\xi}=e^{2\xi-2}$.

Μονάδες 5

Γ4. Ένα κινητό Μ κινείται στην καμπύλη $y=f(x), x>1$.

Καθώς το Μ περνάει από το $N(e,f(e))$ η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό $8m/s$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ.

Μονάδες 5

Γ5. Αν είναι γνωστό ότι η $f\,'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι: $f(x)+f(3x)<2f(2x), για\ κάθε\ x>0$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{x-1} + \ln x \ ,x > 0$

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής και να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f που διαπερνά την C_f. **Μονάδες 8**

Δ2. Αν $0 < \alpha < \beta$ να δείξετε ότι:

$$e^{\beta} - e^{\alpha} + \ln \beta^{e} - \ln \alpha^{e} \geq 2e(\beta - \alpha)$$

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι:

$$\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx < \ln \sqrt{3}$$

Μονάδες 5

Δ4. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(1) = 1$, $g(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, $g\,'(x) < 0$ και

$$e^{g^2(x)-1} - e^{-g'(x)-1} = \ln(-g'(x)) - \ln(g^2(x))$$

i) Να δείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 2**

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση g. **Μονάδες 4**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής .

Μονάδες 5

Α2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f στο Δ;

Μονάδες 5

Α3.Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β] και G μια παράγουσα της f στο [α, β]. Να αποδείξετε ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 6

Α4. Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε **Σωστό** ή **Λάθος** αν θεωρείτε πως είναι Σωστή ή Λανθασμένη αντίστοιχα. Για αυτές που είναι λανθασμένες να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, με την γραφική παράσταση της f.

β. Αν η f, g παραγωγίσιμες στο [α, β] τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$$

γ. Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα Δ τότε θα ισχύει υποχρεωτικά $f''(x) > 0$, για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

δ. Αν f συνεχής συνάρτηση και $f(x) \neq 0$ στο $\mathbb{R}^*$ τότε η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}^*$.

ε. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$, $c > 0$ και $\alpha < \beta$, αντιπροσωπεύει το εμβαδόν του ορθογωνίου με μήκος $\beta - \alpha$ και πλάτος c.

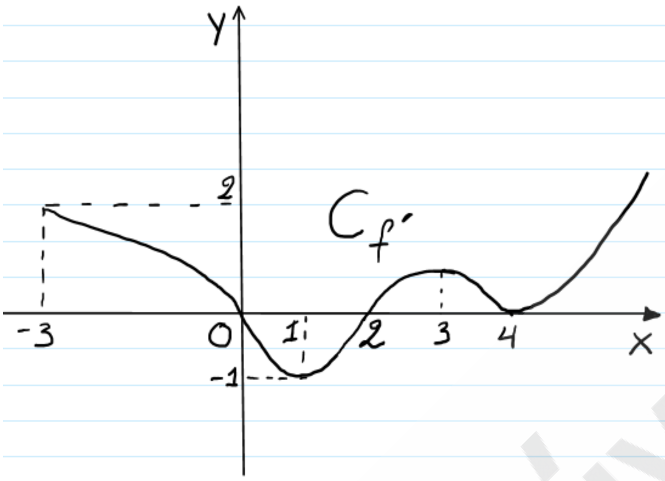
Μονάδες 9

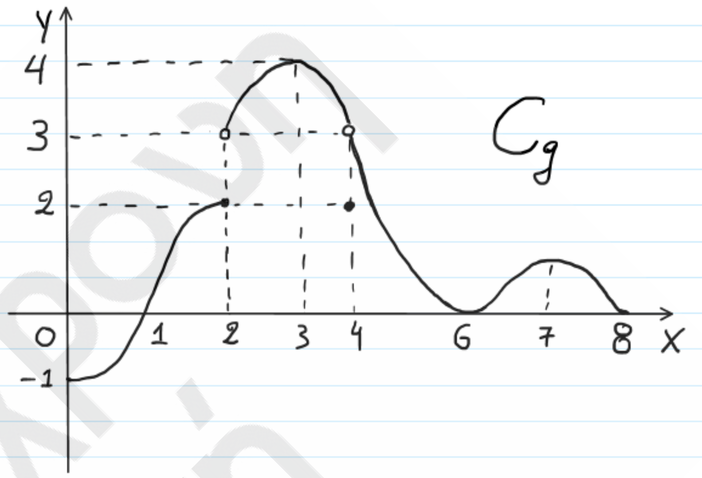
ΘΕΜΑ Β

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [-3, +\infty) \to \mathbb{R}$ *για την οποία ισχύει*

$f(0) = 1$ και η συνάρτηση $g: [0,8] \to \mathbb{R}$

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές πραστάσεις των συναρτήσεων $f'(x)$ και $g(x)$.





Β1. i. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

$\alpha.\lim\limits_{x\to 6} g(x)$ $\quad\beta.\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ $\quad\gamma.\lim\limits_{x\to 4} g(x)$ $\quad\delta.\ \lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{g(x)}$ $\quad\varepsilon.\lim\limits_{x\to 4} g(f'(x))$

ii. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η g δεν είναι συνεχής, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα , τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τις θέσεις των ακροτάτων της f .

Β3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία είναι κοίλη καθώς και τις θέσεις των σημείων καμπής της f .

Δίνεται επιπλέον πως f(2)=-1

Β4. Να δείξετε πως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν στο διάστημα (0,2) μοναδικό κοινό σημείο.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 - \kappa x}{x^2 - 1}$. Εάν $\displaystyle\int_1^{f(2)} \frac{x^2-4}{x^2+1}dx - \int_{f(2)}^{1} \frac{5}{x^2+1}dx = -\frac{13}{3}$

Γ1. Να δείξετε πως $\mathrm{f}(2) = -\dfrac{10}{3}$ $\kappa\alpha\iota\ \kappa = 9$

Μονάδες 3+2=5

Γ2. i. Να δείξετε πως η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 4

ii.Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Γ3.Να δείξετε πως εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$ είναι ισοδύναμη με την f(x)=α και στην συνέχεια πως έχει τρείς ακριβώς ρίζες για κάθε $\alpha \epsilon \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ4.Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται ανάμεσα στην C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \sqrt{2}$ και $x = \sqrt{5}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f , για την οποία ισχύει,

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = 1$
- $\mathrm{f}^2(x) = e^{2x^2}, x\epsilon\mathbb{R}$

Δ1. i. Να δείξετε πως $\mathrm{f}(0) = 1$ Μονάδες 3

ii.Να δείξετε πως ο τύπος της f είναι $f(x) = e^{x^2}, x\ \epsilon\mathbb{R}$

Μονάδες 4

Θεωρούμε επιπλέον μία αρχική H της f στο $\mathbb{R}$, με $H(0) = 0$

Δ2. Εάν το εμβαδό ανάμεσα στην γραφική παράσταση της H, τον $x'x$ και την ευθεία $x = 1$ είναι $E = \frac{1}{2}$, να δείξετε πως $H(1) = \frac{e}{2}$

Μονάδες 4

Δ3. Αν $\int_{H(1)}^{H(3)-6} f(x)dx = 0$, να δείξετε πως υπάρχει $\xi \in (1,3)$, ώστε $f(\xi) = 3$

Μονάδες 6

Δ4. Να μελετήσετε την συνάρτηση H ως προς την κυρτότητα και να δείξετε πως $\int_0^1 \frac{H(x)}{x^2+1}dx > \ln\sqrt{2}$.

Μονάδες 2+6

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

31ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Επιμέλεια : Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γραφικά το θεώρημα μέσης τιμής.

Μονάδες (5+4)

Α2. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος και να τεκμηριώσετε την απάντησή σας με μια με σύντομη αιτιολόγηση.

α) Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής , η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτες

Μονάδες (1+3)

β) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και δεν έχει κρίσιμα σημεία τότε η f είναι αντιστρέψιμη.

Μονάδες (1+3)

γ) Η γραφική παρασταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Μονάδες (1+3)

δ) Στην συνάρτηση $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα *Rölle* στο διάστημα $[-1,1]$.

Μονάδες (1+3)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται ο πραγματικός αριθμός a και η συνάρτηση $f(x)=ax-\sqrt{x^2-\eta\mu x+1}$ για την οποία ισχύει

$2\cdot f(x)\le(a-1)\cdot\pi$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Β1. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού $a=?$ **Μονάδες 6**

Για $a=1$:

Β2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f **Μονάδες 6**

B3. Αν $g(x)=x-\sqrt{x^2-x+1}$, $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

Μονάδες 7

B4. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(2x_0\ ,\ 0)$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί p και q και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x+1} & ,\ x\geq 0\\ x^3+px+q & ,\ x<0\end{cases}$

Γ1. Να δείξετε ότι $p=1$ και $q=2$

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $(0,f(0))$ και να δείξετε ότι

$f(f(x))<x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 6**

Γ4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι αντιστρέψιμη και να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού και ο τύπος

της αντίστροφης $(f')^{-1}=?$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f'(x)-f(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ **(1)**

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)+\ln x+1=ce^x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Μονάδες 6

Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα $x'x$,

Δ2. **(i)** Να δείξετε ότι $c=\frac{1}{e}$

(ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι : $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Μονάδες 7

Δ3. Αν για τους θετικούς αριθμούς α , β , γ ισχύει: $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$, να δείξετε ότι : $e^{\alpha-1}+e^{\beta-1}+e^{\gamma-1}\geq 3$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι : $(x+1)\cdot f(x^2)\leq f(x^3)+x\cdot f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Μονάδες 6

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΙ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

32ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ (Maths) Επιμέλεια : Ανδρέας Βούζας

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α **Μονάδες:10 + 5 + 5 + (2+3)**

Α1. Να αποδείξετε την παρακάτω πρόταση

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- f συνεχής στο Δ
- $f\,'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ .

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ).*

i. Αν για δύο συναρτήσεις $f\,,g$ ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ τότε ισχύει πάντα $f\circ g = g\circ f$

ii. Αν ένα σημείο Μ(α , β) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f τότε το σημείο Μ΄(β ,α) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}.

iii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α ,β) τότε η συνάρτηση f παίρνει μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m.

iv. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και δεν είναι αντιστρέψιμη τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α ,β] στο οποίο η f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

v. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

Α4. Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως *Αληθή(Α)* ή *Ψευδή (Ψ)* και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη , συνεχή και δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Α, ισχύει ότι αν $f''(x_o)=0$ τότε το x_o είναι υποχρεωτικά θέση σημείου καμπής της f.

ΘΕΜΑ Β Μονάδες : 7 + (4 +5)+ 4 +(2+3)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-e^x$.

i. Να βρεθεί η συνάρτηση σύνθεση της g με την f .

Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln(1-e^x)$, $x<0$ τότε :

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να δείξετε ότι $h=h^{-1}$.

iii. Να μελετήσετε την συνάρτηση h^{-1} ως προς την κυρτότητα.

iv. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $C_{h^{-1}}$ και να τη χαράξετε.

ΘΕΜΑ Γ Μονάδες : 4 + (3+2) + 5 + (1+4)+ (4 +2)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\alpha\ln x$, $x>0$ και $0<\alpha\neq 1$. Αν ισχύει $f(x)\geq\alpha$ για κάθε $x>0$ τότε :

i. Να δείξετε ότι $\alpha=e$.

Για $\alpha=e$:

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+e^{x^2}=2e(\ln x+1)$.

iv. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $x_o=e$ και να δείξετε ότι :

$$e^{x-1}-\ln x\geq\left(e^{e-1}-\frac{1}{e}\right)x+e^{e-1}-e^e \quad \text{για κάθε } x>0 .$$

v. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις :

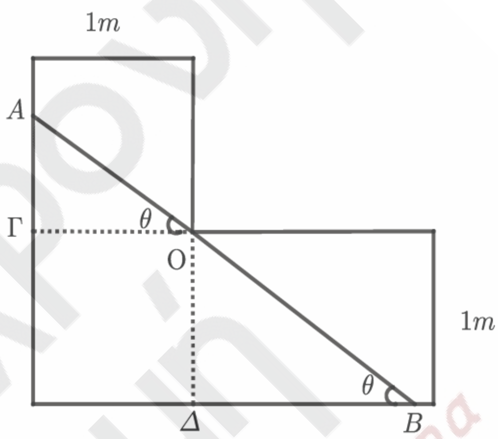
- $g^2(x)+2ef(x)=f^2(x)+e^2$ για κάθε $x>0$

- Η C_g διέρχεται από τα σημεία $A\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ και $B(2,-f(2))$

και να εξετάσετε αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$.

ΘΕΜΑ Δ — Μονάδες : 3 +3+ 4 + 6 +3 +6

Δύο διάδρομοι πλάτους 1m τέμνονται κάθετα και τα σημεία Ο,Α,Β είναι συνευθειακά ,ώστε $A\hat{O}\Gamma = O\hat{B}\Delta = \theta$ με $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.



i. Να δείξετε ότι

$$(AB)=(OA)+(OB)=\frac{1}{\eta\mu\theta}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}=f(\theta)$$

με $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

ii. Για ποια τιμή του θ το μήκος του ΑΒ γίνεται ελάχιστο.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ τέτοια ώστε οι αριθμοί $f'(\xi_1), f'(\xi_2)$ να είναι αντίθετοι .

iv. Να λυθεί στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta=\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\left[2\sqrt{2}-\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]$.

Έστω συνάρτηση $g:R\to R$ με $|g(x)-g(y)|\le|x-y|^\nu$ για κάθε $x,y\in R$, $\nu\in\mathbb{N}$ και $\nu>2$.

v. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο R.

vi. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(\theta)=g(x)$ αν γνωρίζουμε ότι η C_g διέρχεται από το σημείο $M(1,\alpha)$ με $\alpha\in R$.

Ευχόμαστε επι τυχία!!!

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

Σύγχρονη Τομή

Το μέλλον ξεκινάει... σήμερα

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

33ο Διαγώνισμα

Επιμέλεια : Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$

Μονάδες 7

Α2. Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$.Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

Μονάδες 3

Α3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ’ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f;

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη,* ***Σωστό*** *-* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Ισχύει $|\eta\mu x|<|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Μονάδες 2

β. Υπάρχουν συναρτήσεις 1-1 οι οποίες δεν είναι γνησίως μονότονες.

Μονάδες 2

γ. Αρχική συνάρτηση μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F(x)=f'(x)$,για κάθε $x\in\Delta$.

Μονάδες 2

δ. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] και ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f,τις ευθείες x=α , x=β και τον άξονα x'x είναι $E(\Omega)=\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$

Μονάδες 2

ε. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+2|x|}$ και $g(x)=1-\dfrac{2}{|x|}$

Β1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες.

Μονάδες 5

Β2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f,κατασκευάζοντας πίνακα μεταβολών.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 7

Έστω Ω(λ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f,τον άξονα x΄x,την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και τις ευθείες x=-λ,x=λ ,με λ>2.

Β3. Να αποδείξετε ότι $\Omega(\lambda)=4\left(1+\ln\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)$

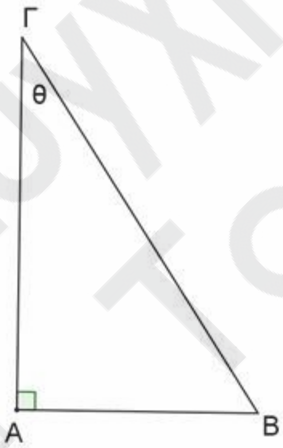
Μονάδες 7

Β4. Υποθέτουμε ότι το σημείο $A\left(\lambda,f\left(\lambda\right)\right)$ απομακρύνεται από τον άξονα των τεταγμένων με ρυθμό 2e cm/sec.Να βρείτε το ρυθμό ,με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν Ω(λ), τη στιγμή που αυτό είναι ίσο με 8.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^0$.Δίνεται ότι ΒΓ=2 ,ΑΒ=x , ΑΓ=y και $A\hat{\Gamma}B=\hat{\theta}$.



Γ1. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο:

i. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{x}{y}$

ii. $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{x}{\sigma\upsilon\nu\theta-1}$

Μονάδες 6

Γ2. Αν $A\Gamma=y=f\left(x\right)$ όπου x=ΑΒ ,να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)=\sqrt{4-x^2}$, $0<x<2$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{3}\cdot\sqrt{4-x^2}<-x+4$ για κάθε 1<x<2

Μονάδες 7

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(\sqrt{x})=f(\sqrt[3]{x})+f(\sqrt[4]{x})$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με σύνολο τιμών [1,4] και f(α)=2,f(β)=3.Να αποδείξετε ότι:

Δ1. υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

Μονάδες 7

Δ2. η εξίσωση $2xf'(x)=-(x^2+1)f''(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

Μονάδες 5

Δ3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $|f'(\xi)|>\dfrac{3}{\beta-\alpha}$.

Μονάδες 5

Δ4. αν F μια αρχική της f στο [α, β] για την οποία ισχύει f(x)F(α+β-x)=1 για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,τότε η συνάρτηση g(x)=F(x)F(α+β-x) είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 8

34ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια : Ανδρέας Βούζας

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ-

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:

$$f'(x_0)=0$$

(Μονάδες 8)

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

(Μονάδες 4)

Α3. Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ.   .

(Μονάδες 3)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

(Μονάδες 2)

β) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 2)

γ) Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\geq 0, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 2)

δ) Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο A και είναι κοίλη τότε $f''(x)<0, x\in A$

(Μονάδες 2)

ε) Μια συνάρτηση που παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα στο πεδίο ορισμού της παρουσιάζει σίγουρα ένα σημείο καμπής.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2\ln x-\frac{x^2}{2}+\alpha x$ και $f(x)\leq f(1)$ για κάθε $x>0$.

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha=-1$.

(Μονάδες 6)

Β2. Να βρεθούν η μονοτονία ,τα ακρότατα και η κυρτότητα της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

Β3. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{x+2}{4}-\frac{3}{2x}}$.

(Μονάδες 6)

Β4. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο $x_0=2$ και να δείξετε ότι $2\ln x-\frac{x^2}{2}+x\le 2\ln 2$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Ο Δημήτρης και ο Γιώργος δύο φίλοι, μαθηματικοί ,κατά τις καλοκαιρινές τους διακοπές σχεδιάζουν την διαδρομή τους για το καθιερωμένο βραδινό ψάρεμα.
Αν θεωρήσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στα ανοιχτά της θάλασσας, ο Δημήτρης θα κινηθεί πάνω στην γραφική παράσταση της $f(x)=x^5-x^3+x, x\ge 0$ με σημείο εκκίνησης το Ο(0,0),ενώ ο Γιώργος την ίδια χρονική στιγμή θα ξεκινήσει από το ίδιο σημείο και θα κινηθεί πάνω στην $f^{-1}(x)$.

Γ1. Να δείξετε ότι οι δύο φίλοι συναντιούνται και να βρεθεί το σημείο συνάντησης .

(Μονάδες 6)

Γ2. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του Γιώργου από τον x'x την χρονική στιγμή της συνάντησης, αν θεωρήσουμε την $f^{-1}(x)$ παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0 με $x(t_0)\in(0,1)$ στο οποίο οι δύο φίλοι έχουν την ίδια ταχύτητα απομάκρυνσης από τον x’x .

(Μονάδες 7)

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται μεταξύ των δύο καμπυλών που κινούνται οι δύο φίλοι.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με :

- $(e^x-1)f(x)+(e^x-x)f'(x)=(e^x-x)f(x)+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $\int_0^{f(0)}\left(e^{x^2}+x^2\right)dx=f(0)$.
- $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=+\infty$ όπου F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.
- $g(x)=e^{x^2+1},x\in\mathbb{R}$ και G παράγουσα της.
- $G(1)=0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(0)=0$ (μονάδες 2) και να βρεθεί ο τύπος της f.(μονάδες 4)

(Μονάδες 2+4=6)

Αν επιπλέον $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x},x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα για την f στα x_0,x_1 με $x_0<1<x_1$ και να βρεθεί το είδος τους .

(Μονάδες 6)

Δ3. Να βρεθεί η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $m(x)=\frac{F(x)}{x}+x$ στο $+\infty$.

(Μονάδες 3)

Δ4. Να δείξετε ότι $f(x)x-F(x)>f(x)-F(1)$ για κάθε $x\in(1,x_1)$.

(Μονάδες 5)

Δ5. Να δείξετε $\int_1^0 G(x)dx<\int_0^{G(2)} G^{-1}(x)dx$.

(Μονάδες 5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

35ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

18 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

Επιμέλεια : Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β] και G μια παράγουσα της f στο [α, β]. Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ =G(β)-G(α)

(Μονάδες 5)

Α2.

Ι. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ. Τί ονομάζουμε αρχική συνάρτηση η παράγουσα της f στο Δ;

ΙΙ.Πότε λέμε ότι η ευθεία y=λx+β είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

(Μονάδες 8)

Α3.Να σημειώσετε με **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις.

i. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ και $\alpha \neq 0$ έχει

πάντα ένα σημείο καμπής.

ii. Κάθε ρητή συνάρτηση με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο κατά δύο τουλάχιστον μονάδες από τον βαθμό του παρονομαστή δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Η γραφική παράσταση μίας κυρτής συνάρτησης βρίσκεται πάντα πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

iv. Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$. Ισχύει $οτι$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx$$

(Μονάδες 8)

Α4. Δίνεται η παρακάτω πρόταση.

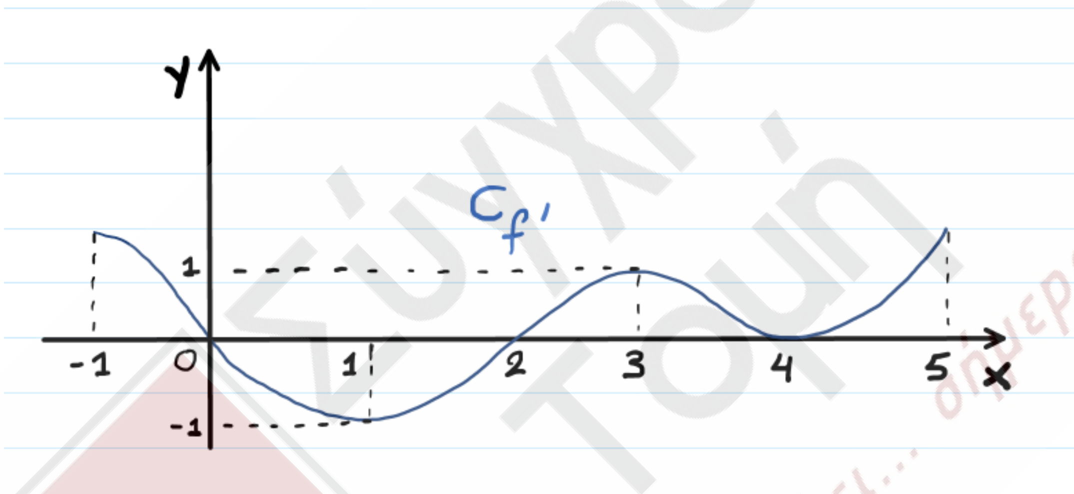
«Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα Δ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ»

Είναι αληθής ή ψευδής; Αιτιολογήστε.

(Μονάδες 1+3=4)

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού [-1 ,5]. Η C_f διέρχεται από το σημείο Κ(1,2).



Β1. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

Β2. Να γράψετε τα διαστήματα κυρτότητας καθώς και τις θέσεις σημείων καμπής της f.

Β3. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x^2-x} \qquad \beta. \lim_{x\to 4}\frac{1}{f'(x)} \qquad \gamma. \lim_{x\to 3} f'(f'(x))$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

Γ2.Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και να δείξετε πως έχει τρία σημεία καμπής ,τα οποία είναι συνευθειακά. (Μονάδες 4+3+2=9)

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να σχεδιάσετε την C_f.

(Μονάδες 2+4=6)

Γ4.Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=λ ,για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι

$x^2 f'(x) + x f(x) = 1$, *για κάθε* $x > 0$ *και παραγωγίσιμη συνάρτηση* g , *με* $g(1) = 0$ *και* $g'(1) = 1$. Επιπλέον ισχύει $g(x) \cdot f(x) \leq e^{x-1} - 1$, *για κάθε* $x > 0$.

Δ1.Να δείξετε πως:

i. f(1)=1

$ii.\ f(x) = \dfrac{lnx + 1}{x}, x > 0$

(Μονάδες 3+4=7)

Δ2. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 4)

Δ3.Να βρεθεί η κυρτότητα της f και τα σημεία καμπής της. (Μονάδες 4)

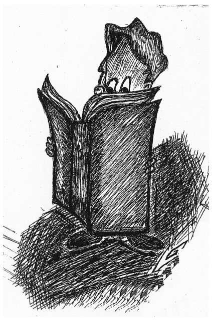
Δ4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να γίνει η C_f.

(Μονάδες 2+4=6)

Δ5.Να λυθεί η εξίσωση

$1 + \ln f(x) = ln\left(-\frac{x}{2} + 2\sqrt{e}\right), x > e^{-1}$ (Μονάδες 4)

---ΤΕΛΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ---



ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

36ο Διαγώνισμα

Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

Θέμα Α

Α1) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να δείξετε ότι: $f'(x_0)=0$ (Μ.15)

Α2) Πότε ένα σημείο λέγεται κρίσιμο σημείο της f ; (Μον.1)

Α3) Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

« Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f''(x_0)=0$ τότε το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f .

Να χαρακτηριστεί ως αληθής (Α) ή ψευδής (Ψ) και να αιτιολογηθεί.

(Μον.4)

Α4) Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις προτάσεις :

α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει τοπικό ακρότατο τότε $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Άν $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

δ) Αν f συνεχής στο $[0,1]$ ισχύει ότι $\int_0^1 xf'(x)\,dx=f(1)-\int_0^1 f(x)\,dx$

ε) Αν η f είναι συνεχής στο Α=$[0,1]$ με $f(\mathrm{A})=[-1,1]$ και $f(0)=f(1)=0$

τότε η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$ **(Μον.5)**

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ με πεδίο ορισμού $\mathrm{A}=[0,+\infty)$

Β1) Να βρεθεί το σύνολο τιμών $f(\mathrm{A})$ και η αντίστροφη της f **(Μον.10)**

Β2) Να βρεθεί η μονοτονία και οι ασύμπτωτες των f και f^{-1}. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων f, f^{-1} **(Μον.5)**

Β3) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο και στη συνέχεια ότι $f(x)\le f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in[0,1)$

(Μον.5)

Β4) Να δείξετε ότι το χωρίο ανάμεσα στην συνάρτηση f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία x=1 είναι ισεμβαδικό με το χωρίο ανάμεσα στην f^{-1}, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y=1$ **(Μον.5)**

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ και η παραγωγίσιμη g με

$g(0)=g(1)>0$ ώστε $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x-1}, & \alpha\nu \quad x\in(0,1)\cup(1,+\infty) \\ \int_0^1 g(x)dx+1, & \alpha\nu \quad x=1 \\ e^x-x-1, & \alpha\nu \quad x\in(-\infty,0] \end{cases}$$

Γ1) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα κα να δείξετε ότι έχει σύνολο τιμών $f(\mathrm{A})=[0,+\infty)$ **(Μον.8)**

Γ2) Να δείξετε ότι $\int_0^1 g(x)dx=0$ και στη συνέχεια ότι η g έχει τουλάχιστον μία αρνητική τιμή $g(\alpha)$ με $\alpha\in(0,1)$ **(Μον.7)**

Γ3) Να λυθεί η ανίσωση : $x^2e^x>(x+1)(e^x-1)\ln(x+1)$ στο $(0,+\infty)$ **(Μον.5)**

Γ4) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα (0,1) και στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση : $f'(x)g(x)+g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0,1) **(Μον.5)**

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(x)>0$ και $f(0)=f'(0)=1$ για τις οποίες ισχύουν:

- $|g(x)-g(y)|\le(x-y)^2$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$
- $|f'(x)f(y)-f'(y)f(x)|\le f(x)f(y)(x-y)^2$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Δ1) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι $f(x)=e^x$ με $\mathrm{A}=\mathbb{R}$ **(Μον.8)**

Δ2) Να βρεθεί σημείο Μ της C_f που είναι πλησιέστερο στο σημείο Α(1,0) και να δείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ

(Μον.7)

Δ3) Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση h στο $\mathbb{R}$ ισχύει $h(x) < e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η κατακόρυφη απόσταση των f και h είναι ελάχιστη στα σημεία Μ(0,1) και $N(0, h(0))$. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες στα σημεία Μ και Ν είναι παράλληλες.

(Μον.5)

Δ4) Να βρεθεί ο φυσικός $\nu \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει ότι :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left[f(x+1) - f(1) \right]^{2\nu} \eta\mu^{\nu} x}{x^{3\nu}} = \int_0^1 \left(4xe^{2x} - \nu \right) dx$$ **(Μον.5)**

37ο Διαγώνισμα_2025
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΟΥΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α₁. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

Τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

(Μονάδες 7)

Α₂. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

Α₃. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

Α₄. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει ένα κοινό σημείο A με την ευθεία $y=x$, τότε το σημείο A ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

(Μονάδες 2)

β. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

(Μονάδες 2)

γ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

(Μονάδες 2)

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle .

(Μονάδες 2)

ε. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha ,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx=0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+2 & , x\le 2 \\ e^{x-2}+\mu & , x>2 \end{cases}$, με $\mu\in\mathbb{R}$.

Β₁. Να βρείτε την μικρότερη τιμή του $\mu\in\mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι «1-1»

(Μονάδες 7)

Αν $\mu=3$ τότε:

Β₂. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=\begin{cases} x-2 & , x\le 4 \\ \ln(x-3)+2 & , x>4 \end{cases}$.

(Μονάδες 6)

Β₃. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=23-4x$ για $x>4$ έχει ακριβώς μια λύση $x=x_0$ με $x_0\in(5,6)$.

(Μονάδες 7)

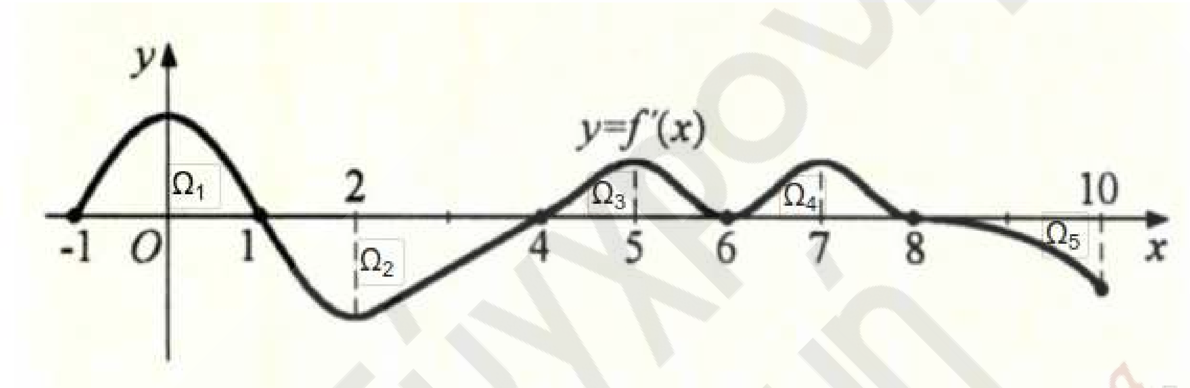
Β₄. Για τη λύση x_0 του ερωτήματος Β₃ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$5<f(23-4x_0)<6$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1,10]$



Γ₁. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη , και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων, και σημείων καμπής, καθώς και το είδος των τοπικών ακρότατων.

(Μονάδες 6)

Γ₂. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

i. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-2}{f'(x)}$ **ii.** $\lim_{x\to 6}\dfrac{x+5}{f'(x)}$

Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

(Μονάδες (2+2)

Γ₃. Αν $E(\Omega_1)=12$, $E(\Omega_2)=14$, $E(\Omega_3)=7$, $E(\Omega_4)=6$, $E(\Omega_5)=5$.

i Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{10} f'(x)dx$.

(Μονάδες 2)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f' τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=10$.

(Μονάδες 2)

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(6,8)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=3x+2025$.

(Μονάδες 5)

Γ₄. Αν $f(8)=22$ να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^9\left(\frac{f(x)}{\int_0^9|f(u)|du}\right)dx$

(Μονάδες 3+3)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(e^x+1)f'(x)=e^x(1-f(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον αν είναι γνωστό ότι $f(0)=\frac{1}{2}$.

Δ₁. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Δ₂. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν).

(Μονάδες 4)

Δ₃. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f(2025^x) + f'(2026^x) < f(2026^x) + f'(2025^x)$$

(Μονάδες 6)

Δ₄. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f με την διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου των αξόνων έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο $M(x_0, x_0)$ με $x_0 \in (0,1)$.

(Μονάδες 4)

Δ₅. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = x_0$ είναι $\left(x_0 - \ln(2x_0)\right)$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 5)

38ο Διαγώνισμα ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΜΑΪΟΥ 2025 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|, x \in \mathbb{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Μονάδες 6

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle.

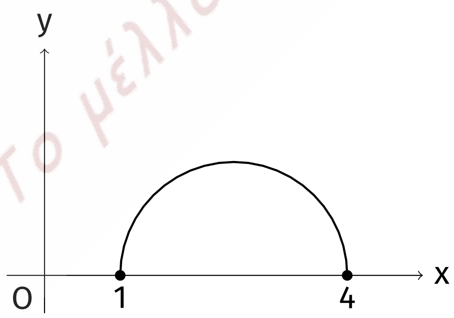
Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

iii. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα,



τότε υπάρχει $x_0 \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

iv. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = -\infty$.

v. Κάθε συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{5x+1}{x-5}$, $x \in \mathbb{R} - \{5\}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{5\}$ (Μονάδες 3) και ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες (Μονάδες 6).

Μονάδες 9

Β2. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{5\}$.

Μονάδες 4

Β3. Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο διάστημα $[6,7]$. Εφόσον πληρούνται ,να το εφαρμόσετε και να βρείτε όλα τα $\xi \in (6,7)$ που το επαληθεύουν.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία $y = 5$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot \ln x}{1-x} & ,\text{αν } 0 < x \neq 1 \\ f(1) & ,\text{αν } x = 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(f(1)+1)x^3 + 2x^2 - 3}{x^2+1} = 2.$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(1) = -1$.

Μονάδες 4

Για

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot \ln x}{1-x} & ,\text{αν } 0 < x \neq 1 \\ -1 & ,\text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 5

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (1-x)^2 + 2x(\ln x + 1 - x)$.

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και να βρεθεί το πρόσημό της.

Μονάδες 5

ii. Με τη βοήθεια του (i) και γνωρίζοντας ότι η f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 3

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$\int_1^2 f(x)dx > -\frac{5}{4}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$g'(x) = \frac{e^x + 1}{e^{g(x)}},\ x \geq 0$$

και $g(0) = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \ln(e^x + x),\ x \geq 0$.

Μονάδες 3

Αν

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & ,\text{αν } x < 0 \\ g(x) & ,\text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Δ2. **i.** Να βρεθεί, αν υπάρχει, κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 2

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{e^{g(x)} - g(x)}{x} + \frac{g(x)}{x - 2025} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0, 2025)$.

Μονάδες 5

Δ4. Σημείο Μ με θετική τετμημένη κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι $1\text{cm}/\text{sec}$. Αν Ν η προβολή του Μ στον άξονα $x'x$ και σημείο $A(0, \alpha)$, $\alpha > 0$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΝ τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του Μ είναι 2cm.

Μονάδες 5

Δ5. Να λύσετε την εξίσωση

$$f\left(e^{x^2} - 1\right) + f\left(|x| - |\eta\mu x|\right) = 0\,, \ x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους / τις εξεταζόμενες)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

40ο Διαγώνισμα Μαθηματικά
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f,g είναι δυο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ τότε οι $g \circ f$ και $f \circ g$ δεν είναι υποχρεωτικά ίσες **.**

β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

δ) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ε) Αν $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g

$f(x) = \sqrt{4-x}, x \leq 4$

$g(x) = \ln x, x > 0$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρεθεί η f^{-1}και να γίνουν στο ίδιο σύστημα αξόνων οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $h(x) = 4 - x^2$, $x \geq 0$.

Β2. Να ορισθεί η συνάρτηση $g \circ h$.

Μονάδες 6

Β3. Έστω $K(x) = \ln(4 - x^2)$ $x \in [0,2)$. Να βρεθεί η μονοτονία, τα ακρότατα και οι ασύμπτωτες της.

Μονάδες 7

Β4. . Δείξτε ότι η ευθεία ψ=1 τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης Κ(χ) σε ακριβώς ένα σημείο με τετμημένο χοε(0,2)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 \ , & x < 0 \\ 2e^x - x^2 - 2x - \alpha \ , & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και να εξετάσετε αν η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ και $\rho \in (-2, -1)$.

Μονάδες 4

Γ4. Το σημείο $\mathrm{M}(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 0$ κινείται στη C_f και το α μεταβάλλεται με ρυθμό $1\ \mathrm{cm/min}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού που σχηματίζει η C_f με τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$, $x = \alpha$ τη χρονική στιγμή που η κλίση της f στο M είναι $2e - 4$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $g(x) = 1 + x - e^x$ και

$h(x) = f^2(x)$, με $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα.

Μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε το πρόσημο και τις ασύμπτωτες της C_g και να αποδείξετε ότι η ασύμπτωτη (ε) της C_g στο $-\infty$ εφάπτεται με την $h(x)$.

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{3}}{2} < \int_0^1 f(x)dx < \sqrt{3}$.

Μονάδες 6

Δ4. Έστω $M(x, h(x))$ και $N(x, g(x))$.

Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο η απόσταση MN γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 5

41ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας
avouzas.webnode.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών
(2+6=8 μονάδες)

Α2. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle **(3 μονάδες)**

Α3. Δίνεται η πρόταση: «Μια συνάρτηση ορισμένη στο R και δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία υπάρχει x_o τέτοιο ώστε $f''(x_o)=0$, έχει σημείο καμπής στο x_o».
Να την χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» **(1 μονάδα)** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(3 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως «Σωστό» ή «Λάθος» :

α. Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων μεταξύ τους συναρτήσεων έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία y=x

β. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R, μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α, τότε και η σύνθεσή τους ορίζεται και έχει πεδίο ορισμού το Α.

δ. Η εφαπτομένη μιας συνάρτησης ορισμένης παραγωγίσιμης και κυρτής στο R, σε σημείο της $(x_o,f(x_o))$ μπορεί να έχει και άλλα κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f εκτός από το σημείο x_o .

ε. Για μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής και μη αρνητική σε διάστημα [α, β] , ισχύει ότι το εμβαδόν ανάμεσα στον xx΄ και την γραφική της παράσταση δίνεται από το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις h, t με τύπους :

$$h(x)=\frac{x^2-2}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad t(x)=\sqrt{x+2},\ \ x\in[-2,+\infty)$$

Β1. Να ορίσετε τη σύνθεση της t με την h. **(6 μονάδες)**

Έστω $f(x)=(h\circ t)(x)=\frac{x}{x+3},\ x\in[-2,+\infty)$

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα, κοίλη και να βρείτε – αν υπάρχουν – τις ασύμπτωτές της. **(9 μονάδες)**

Β3. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, έστω f^{-1} , και να υπολογίσετε το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής της f^{-1}, τον άξονα xx΄ και τις ευθείες x=-1, x=0.
(5+5=10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} \ln k+1+\ln x, & 0<x<1 \\ k-\ln x, & x\geq 1 \end{cases}$, $k>0$.

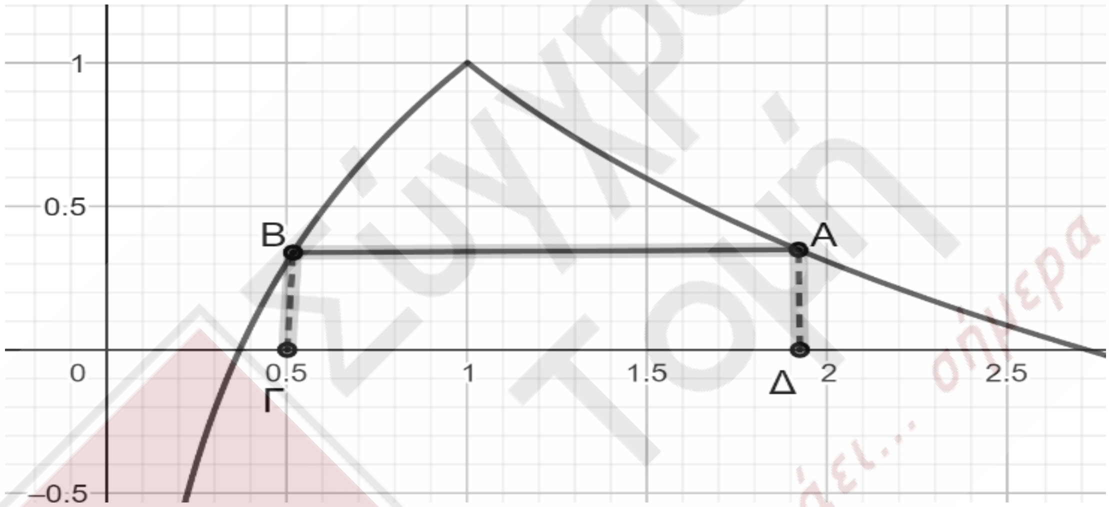
Γ1. Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, να αποδείξετε ότι k=1. **(5 μονάδες)**

Γ2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f . Αν το σημείο Α(α, f(α)) , όπου 1<α<e , βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης και το τμήμα ΑΒ είναι παράλληλο στον x΄x, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β. **(4 μονάδες)**

Έστω ότι το σημείο Β έχει συντεταγμένες $B\left(\frac{1}{\alpha},1-\ln\alpha\right)$

ii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της f στα σημεία της Α και Β είναι κάθετες μεταξύ τους. **(3 μονάδες)**



Γ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία ΑΒ. **(6 μονάδες)**

Γ4. Αν η τετμημένη α του σημείου Α μεταβάλλεται με ρυθμό 1μ/s , να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τη χρονική στιγμή όπου $\alpha(t_o)=2$. **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\ln x-e^{-x}-x+2,\quad x\in(0,+\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση g(x)=0 έχει δύο τουλάχιστον ρίζες x_1 , x_2 με $0<x_1<1<x_2$. **(7 μονάδες)**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g εμφανίζει μέγιστο σε μοναδικό σημείο x_o, το $g(x_o)=\ln x_o+\frac{1}{x_o}-x_o+1$ **(7 μονάδες)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι g(x)>0 για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ **(5 μονάδες)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{x_1}^{1} e^{g'(x)-1}\,dx>1-\frac{1}{e}$, όπου x_1 η μικρότερη από τις δύο ρίζες της εξίσωσης g(x)=0. **(6 μονάδες)**

42ο Διαγώνισμα Μαθηματικά
Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

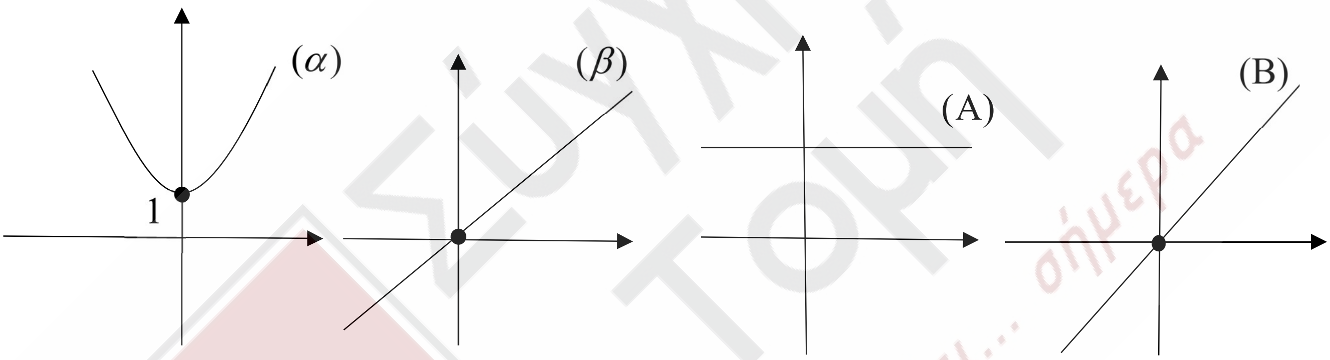
Γ' λυκείου

ΘΕΜΑ Α

Α1) Να αποδείξετε ότι $\left(\alpha^{x}\right)' = \alpha^{x}\ln\alpha$ **για** $x\in\mathbb{R}$ **και** $\alpha>0$

Α2) Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano

Α3) Να αντιστοιχίσετε καθεμία από τις συναρτήσεις α,β **σε εκείνη από τις** A,B **που είναι η παράγωγός της**



Α4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, τη λέξη Σωστό , ή Λάθος

α) Αν $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της παραγωγίσιμης f τότε υποχρεωτικά θα ισχύει $f'(x_0)=0$.

β) Αν ισχύει ότι $\int_{-1}^{2} f(x)dx>0$ τότε $f(x)>0$ για $x\in[-1,2]$.

γ) Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, είναι σταθερή συνάρτηση.

δ) Ισχύει ότι $\left(x^{x}\right)' = x\cdot x^{x-1}$ για $x>0$.

ε) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2+x+1}{x^2+1}=\alpha$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=x+1,\ g\left(x\right)=\alpha x+2$ **για τις οποίες ισχύει ότι** $fog=gof$

Β1) Να δείξετε ότι $\alpha=1$

Β2) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f , $f\ +1$ είναι ασύμπτωτες της συνάρτησης $h\left(x\right)=x+1+\dfrac{e^x}{e^x+1}$, A=$\mathbb{R}$ στο $-\infty$ και $+\infty$ αντίστοιχα

Β3) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $\Phi\left(x\right)=h\left(x\right)-f\left(x\right)-1$ και να δείξετε ότι $\left|\Phi\left(\beta\right)-\Phi\left(\alpha\right)\right|\leq\left|\beta-\alpha\right|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Β4) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στη Φ, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^x-1+\ln\left(x+1\right)$ **με** $\mathrm{A}=\left(-1,+\infty\right)$

Γ1) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

Γ2) Να βρείτε το σημείο καμπής της f και την εφαπτομένη ευθεία σε αυτό

Γ3) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f\left(\alpha\right)-2\alpha}{x}-\frac{f\left(-\alpha\right)+2\alpha}{x-1}+\frac{2f^{-1}\left(\alpha\right)-\alpha}{x-2}=0$$

έχει ακριβώς δυο ρίζες στο διάστημα $\left(0,2\right)$ με $\alpha>0$

Γ4) Να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_0^{f(1)} f^{-1}\left(x\right)dx$

ΘΕΜΑ Δ

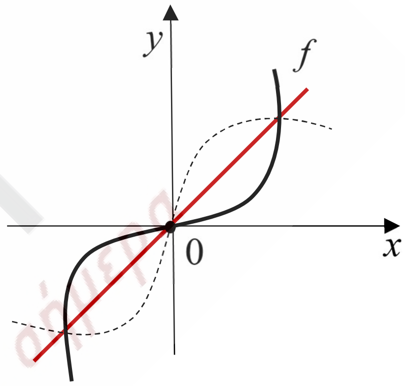
Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}=(\nu+1)x_0^{\nu}$$ **για κάθε** $x,x_0\in\mathbb{R}$ **και** $\nu\in\mathbb{N}^*$

Δ1) Να δείξετε ότι $f(x)=x^{\nu}$, $A=\mathbb{R}$

Δ2) Να δείξετε ότι $f(x+1)\geq 1+\nu x+\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}x^2$

για κάθε $x\geq 0$ και $\nu\geq 3$



Δ3) i) Να βρείτε την αντίστροφή της συνάρτησης f αν για το εμβαδόν χωρίου Ε ανάμεσα στην f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ ισχύει ότι: $E=2^{1-\nu}$

ii) Να βρείτε $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ αν ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ότι

$$(\sigma\upsilon\nu\alpha)^{f(x)-\alpha}+(\eta\mu\alpha)^{-f(x)+\alpha}\geq 2$$

Κάθε Επιτυχία

43ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

Μαθηματικός

M.Sc.Operational Research

M.Sc. Information Systems

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c$$

όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c$$

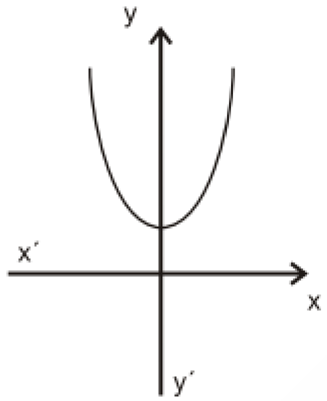
με $c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

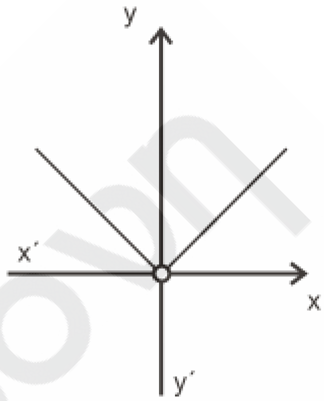
Α2. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

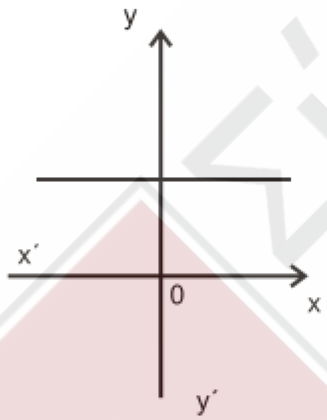
Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T



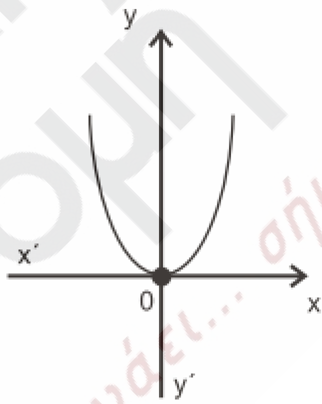
(f)



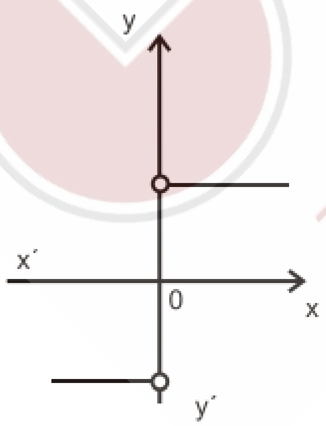
(g)



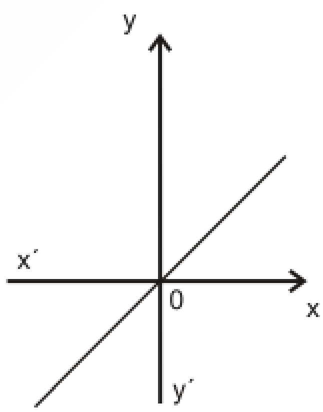
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\alpha)-G(\beta)$

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x

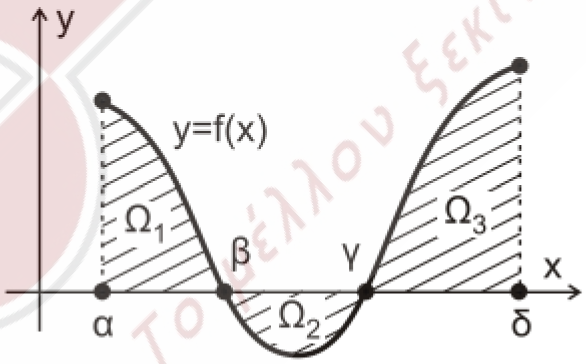
γ) Για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha,\beta]$ ισχύει:

αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$, τότε $f(x)>0$ στο $[\alpha,\beta]$

δ) Αν ένα σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $\mathrm{M}'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}

Μονάδες 8

Α5. Έστω η συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος:



Αν για το εμβαδόν των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι $\mathrm{E}(\Omega_1)=2$, $\mathrm{E}(\Omega_2)=1$ και $\mathrm{E}(\Omega_3)=3$, τότε το $\int_\alpha^\delta f(x)dx$ είναι ίσο με:

α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$, $x\in\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0=2$ ίσο με -1.

Β1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Αν $\alpha=-4$ και $\beta=3$, τότε:

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-2}$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία Α,Β στα οποία η C_f τέμνει τον άξονα των x.

Μονάδες 6

Β4. Αν Γ είναι το σημείο τομής των παραπάνω εφαπτομένων, τότε να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\dfrac{2}{1}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, $f(1)=e$ και τέτοια, ώστε να ισχύει $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & , x\neq 0\\ 1 & , x=0\end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (2 μονάδες)

β) η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ (5 μονάδες)

Μονάδες 7

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την εφαπτομένη της στο σημείο $\mathrm{M}(1, f(1))$ και την ευθεία $x = 0$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (3 μονάδες) και στη συνέχεια να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(f(x)+1)}{x^2+2024}$ (3 μονάδες)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της f^{-1}

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$ για κάθε $x > 0$

Μονάδες 6

Έστω επιπλέον F μια παράγουσα της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $F(e) = e\cdot\ln 2$

Δ3. Να αποδείξετε ότι $F(1) > \ln 2$

Μονάδες 6

Δ4. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$, τότε να αποδείξετε ότι $E < e - 1 + \ln\dfrac{2^{e^2+1}}{(e+1)^{e+1}}$.

Μονάδες 7

44ο Διαγώνισμα ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β),με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο $(α, x_o)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_o, β)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ) του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\int_α^β f(x)dx = 0$, τότε κατ΄ ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in [α, β]$.

β. Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_o} \frac{1}{f(x)}=0$.

γ. Αν f , g δυο συναρτήσεις και ορίζονται οι συναρτήσεις $φ=f\circ g$ και $ω=g\circ f$, τότε οι φ και ω είναι υποχρεωτικά ίσες.

δ. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ε. Ισχύει $(\ln|x|)'=-\frac{1}{x}$ για κάθε $x<0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$g(x)=\ln x\,,\ x>0 \text{ και } h(x)=e-\frac{1}{x}\,,\ x>0.$$

B1. Να οριστεί η συνάρτηση $f = g \circ h$.

Μονάδες 6

B2. Αν $f(x)=(g \circ h)(x)=\ln(e-\frac{1}{x})$, $x>\frac{1}{e}$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και να βρεθεί η αντίστροφη της. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

B3. Αν $\varphi(x)=f^{-1}(x)=\frac{1}{e-e^{x}}$, $x<1$, τότε :

i. να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης φ.

Μονάδες 6

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$ex+\frac{1}{\varphi(x)}=0$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

Μονάδες 6

.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} xe^{x}+\ln\lambda & , \ x<0 \\ 2\eta\mu x - x + \lambda - 1 & , \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ όπου } \lambda \in R \text{ και } \lambda > 0$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι λ=1.

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε λ=1

Γ2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι :

$$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2}\,dx > \frac{-3}{2e}$$

Μονάδες 4

Γ5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=-1$ και $x=\frac{\pi}{3}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να λύσετε την εξίσωση :

$$\ln x = \frac{e}{x}, x>0$$

Μονάδες 4

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=(x-e)\ln x - x, x > 0}$

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -e$, για κάθε $x>0$

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη με την ευθεία

η: $y=-e \cdot x$ **Μονάδες 4**

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση :

$$f(e \cdot x)+f(x)+e \cdot x=-1$$

Μονάδες 6

Δ5. Για κάθε $x>0$,να δείξετε ότι :

$$f(e^x + 1) + f(x) > f(e^x) + f(x + 1)$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε **ή μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει . Μολύβι ΔΕΝ επιτρέπεται.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
3. Διάρκεια εξέτασης : τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ | 2025

45ο ΕΠΑΝ/ ΙΚΟ ΔΙΑΓ/ ΣΜΑ ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ

Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ’ ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν ασύμπτωτες.

β) Αν το $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε υποχρεωτικά θα ισχύει $f''(x_0) = 0$.

γ) Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σ’ ένα διάστημα Δ είναι πάντοτε θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

δ) Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, είναι σταθερή συνάρτηση.

ε) Μία συνάρτηση f είναι $1-1$ αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = 1 - \sqrt{x}\,,\ x \geq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 1\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 2+3

Β2. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ (σύνθεση της g με την f).

Μονάδες 5

- Για τα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι:

$$h(x) = 1 - \sqrt{x^2 - 1}\,, \quad \text{με } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\,.$$

B3. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις ασύμπτωτες της C_h.

Μονάδες 5

B4. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ εφάπτεται στη C_f.

Μονάδες 5

B5. Να αποδείξετε ότι η C_h έχει με την ευθεία (ε) του ερωτήματος (B4), ένα, τουλάχιστον, κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & , \text{ αν } x \leq 1 \\ \dfrac{ln\left(\alpha x^2 - 2x + 2\right)}{x - 1} & , \text{ αν } x > 1 \end{cases} \quad , \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ με } \alpha > 0.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $a = 1$ και $\beta = -1$.

Μονάδες 6

- Για $a = 1$ και $\beta = -1$:

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$ με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5+2

- Δίνεται, επιπλέον, η συνάρτηση $g : (0, 1] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$g(x) = f(x)\, ln\, x\,, \quad \text{για κάθε } x \in (0, 1]\,.$$

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = \frac{1}{e}$.

Μονάδες 6

Γ4. Για κάθε $k \in (0, 1)$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) \cdot \eta\mu \dfrac{1}{g(x)}}{\left[g(k) - g(k^2)\right] \cdot (\eta\mu x - x)}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα εξής:

- $x f'(x)-f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$, για κάθε $x>0$ και
- $\displaystyle\int_1^2 \left[f(x)+(x-2)\cdot f'(x)\right]dx=-\frac{1}{2}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=x\,ln\,x-\dfrac{x^2}{2},\ x\in(0,+\infty)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(e^{x^2-1}\right)=f\left(x^2\right)$$

Μονάδες 5

Δ3. Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης της C_f. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της καμπύλης στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ να είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$\left(x_0^2-3x_0+2\right)\left[\,ln(ex_0)-x_0\right]=\left(3-2x_0\right)\left(ln\,x_0^{x_0}-\frac{x_0^2}{2}\right)$$

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$ και x_0 αυτό που αναφέρεται στο ερώτημα (Δ4), να αποδείξετε ότι:

$$F(x_0)-F(1)<(x_0-1)\left[f(x_0)-\frac{(x_0-1)\,f'(x_0)}{2}\right]$$

Μονάδες 5

46ο Διαγώνισμα_2025 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΠΙΜΈΛΕΙΑ: Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α₁. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

Τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

(Μονάδες 7)

Α₂. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

Α₃. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

Α₄. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει ένα κοινό σημείο A με την ευθεία $y=x$, τότε το σημείο A ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

(Μονάδες 2)

β. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

(Μονάδες 2)

γ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

(Μονάδες 2)

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle .

(Μονάδες 2)

ε. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha\,,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_\beta^\alpha f(x)dx=0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+2 & , x\le 2 \\ e^{x-2}+\mu & , x>2 \end{cases}$, με $\mu\in\mathbb{R}$.

Β₁. Να βρείτε την μικρότερη τιμή του $\mu\in\mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι «1-1»

(Μονάδες 7)

Αν $\mu=3$ τότε:

Β₂. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=\begin{cases} x-2 & , x\le 4 \\ \ln(x-3)+2 & , x>4 \end{cases}$.

(Μονάδες 6)

Β₃. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=23-4x$ για $x>4$ έχει ακριβώς μια λύση $x=x_0$ με $x_0\in(5,6)$.

(Μονάδες 7)

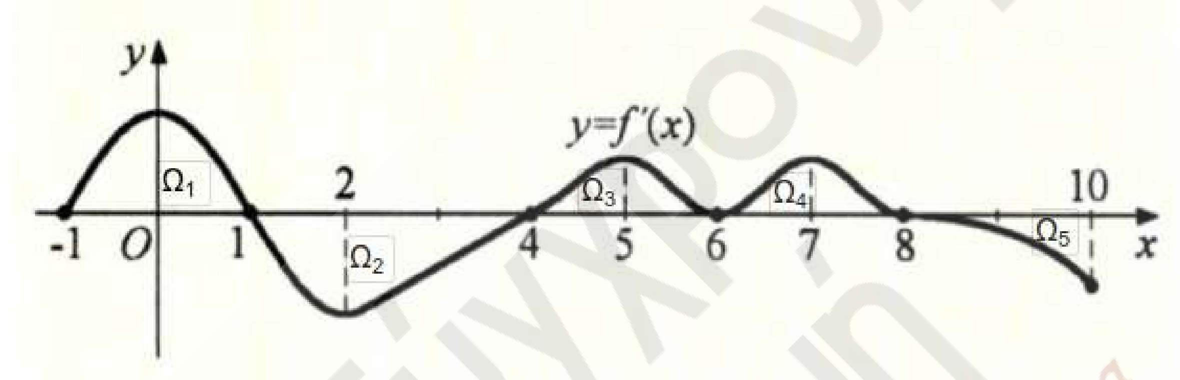
Β₄. Για τη λύση x_0 του ερωτήματος Β₃ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$5<f(23-4x_0)<6$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1,10]$



Γ₁. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη , και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων, και σημείων καμπής, καθώς και το είδος των τοπικών ακρότατων.

(Μονάδες 6)

Γ₂. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{f'(x)}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x+5}{f'(x)}$

Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

(Μονάδες (2+2)

Γ₃. Αν $E(\Omega_1)=12$, $E(\Omega_2)=14$, $E(\Omega_3)=7$, $E(\Omega_4)=6$, $E(\Omega_5)=5$.

i Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{10} f'(x)dx$.

(Μονάδες 2)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f' τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=10$.

(Μονάδες 2)

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(6,8)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=3x+2025$.

(Μονάδες 5)

Γ₄. Αν $f(8)=22$ να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^9\left(\dfrac{f(x)}{\int_0^9|f(u)|du}\right)dx$

(Μονάδες 3+3)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\left(e^x+1\right)f'(x)=e^x\left(1-f(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον αν είναι γνωστό ότι $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

Δ₁. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Δ₂. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν).

(Μονάδες 4)

Δ₃. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f(2025^x)+f'(2026^x)<f(2026^x)+f'(2025^x)$$

(Μονάδες 6)

Δ₄. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f με την διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου των αξόνων έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο $M(x_0,x_0)$ με $x_0\in(0,1)$.

(Μονάδες 4)

Δ₅. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=x_0$ είναι $\left(x_0-\ln(2x_0)\right)$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 5)

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

47ο Διαγώνισμα

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Επιμέλεια: Ανδρέας Βούζας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Μονάδες 7

Α2. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$ όπου f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_o τότε τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_o;

Μονάδες 4

Α3. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)<0$ τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_o

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|ημx| > |x|$

γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται είναι κρίσιμα σημεία της f στο Δ.

δ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ημx}{x}=1$

ε) Αν μια συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [α, β] τότε η f δεν είναι 1-1

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$, $x\neq 2$

Β1. Να μελετήσετε την **f** ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τη σχετική θέση της C_f με την πλάγια ασύμπτωτη της.

Μονάδες 6

Β4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση **g** με $g(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$, $x<0$ αντιστρέφεται και να εξετάσετε αν ορίζεται η σύνθεση **gog**

Μονάδες 3+3

ΘΕΜΑ Γ

Η κάθε μία απ' τις δύο ίσες πλευρές ισοσκελούς τριγώνου είναι **10** και έστω x το μήκος της τρίτης πλευράς του.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται απ' τη συνάρτηση:

$$E(x)=\frac{1}{4}x\sqrt{400-x^2} \quad \text{όπου} \quad x\in(0,\ 20)$$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται απ' το σημείο **(16, 1878)** και η κλίση της στο σημείο $(x,\ f(x))$ είναι $E(x)$

Μονάδες 6

Γ3. Για ποια τιμή του x μεγιστοποιείται το εμβαδόν $E(x)$ και πόσο είναι τότε το μέγιστο εμβαδόν;

Μονάδες 6

Γ4. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η ευθεία $y=\lambda x$ τέμνει την C_E ακριβώς σε ένα σημείο.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω οι συναρτήσεις $\mathbf{f}(x)=\eta\mu(\pi x)$ και $\mathbf{g}(x)=|x^2 - x|$

Δ1. Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων τις C_f και C_g

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες εφαπτόμενες της C_f οι οποίες είναι παράλληλες στην εφαπτομένη της C_g στο τοπικό της μέγιστο.

Μονάδες 6

Δ3. Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται απ' τις C_f και C_g. Να βρείτε την κατακόρυφη ευθεία που χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 1+6

Δ4. Αν $\mathbf{h}(x)=\left(1+\mathbf{f}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^x$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,\ 2)$ τέτοιο ώστε $\mathbf{h}'(x_0)=0$

Μονάδες 6