

2^ο Διαγώνισμα Μαθηματικά Γ Λυκείου
Θετικής και Τεχνολογικής
κατεύθυνσης

Νοέμβριος 2024



Θέμα Α 25 μονάδες

- A1.** Να αποδείξετε ότι όταν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. (Μονάδες 8)
- A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano (Μονάδες 3)
- A3.** Πότε μία συνάρτηση f ονομάζεται παραγωγίσιμη στο κλειστό $[a, b]$; (Μονάδες 4)
- A4.** Να απαντήσετε με σωστό ή λάθος στις παρακάτω προτάσεις: (Μονάδες 10)
- a.** Αν η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε η f είναι αντιστρέψιμη.
 - b.** Αν μία συνάρτηση είναι 1-1 τότε θα έχει το πολύ μία ρίζα.
 - c.** Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν διατηρεί πρόσημο, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.
 - d.** Η συνάρτηση $f(x) = x \cdot |x|$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.
 - e.** Αν μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Θέμα Β

- B1.** Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = f'(1) = 1$ και $g(1) = g'(1) = 2$. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων στο $x_0 = 1$ των :

a. $K(x) = x^2 \cdot f(x) - g(x) \cdot \sqrt{x}, x \geq 0$

b. $M(x) = (f(x) - g(x)) \cdot \ln x, x > 0$ (Μονάδες 6)

B2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & x < -b \\ 2, & -b \leq x \leq a \\ \frac{2}{x}, & x > a \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}^*, a > b$.

- a.** Να βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}^*$, ώστε η συνάρτηση f να είναι **συνεχής**. (Μονάδες 5)

b. Για $a = b = 1$ προφανώς έχουμε ότι $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$

i. Να εξετάσετε αν η f είναι **παραγωγίσιμη**. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(-x_0, f(-x_0))$, με $x_0 > 1$. (προσοχή το $-x_0 < -1$ άρα στον άλλο τύπο) (Μονάδες 4)

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in [-k, k]$ με $k \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x_1) = \frac{3f\left(\frac{k}{2}\right) + 2f\left(-\frac{k}{2}\right) + 4f\left(\frac{k}{3}\right) + f\left(-\frac{k}{3}\right)}{10} \quad (\text{Μονάδες 4})$$

B3. Να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+4h) - 2f(x+2h) + f(x)}{h^2} = 4f''(x)$. (Μονάδες 4)

Θέμα Γ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [e^{-1/2}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \neq -1$ για κάθε $x \geq e^{-1/2}$
- $f(x) - 1 = \frac{2 \ln x}{f(x) + 1}$ για κάθε $x \geq e^{-1/2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} - f(1) \right) x^3 + x^2 + 1 = +\infty$ (πολυώνυμο στο άπειρο)

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{2 \ln x + 1}$ για κάθε $x \geq e^{-1/2}$. (Μονάδες 6)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} **και** τον τύπο της $f^{-1}(x)$. (Μονάδες 5)

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία **διέρχεται** από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 5)

Γ4. Να αποδείξετε ότι **υπάρχει** τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε, η **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να **διέρχεται** από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$. (Μονάδες 4)

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow e^{-1/2}} \left[f^2(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} + \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right]$. (Μονάδες 5)

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- Η f είναι **συνεχής** συνάρτηση με $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} - x - k & , x < 0 \\ \ln(x+1) + x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$.
- η συνάρτηση φ είναι γνησίως μονότονη.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $k=1$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=2$ σε **ακριβώς δύο** σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ με $x_1 < 0 < x_2$ για τα οποία ισχύει $x_2 - x_1 < 2$. κάντε όμορφο έξυπνο πινακάκι (Μονάδες 5)

Δ3. Αν ισχύει ότι $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 3 \cdot e^x}{2^x + 5 \cdot e^x}$ (εκθετικό στο άπειρο) και $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 6x + x})$ (ριζικό το άπειρο), να αποδείξετε ότι $a=1$ και $b=3$. (Μονάδες 5)

Δ4. Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - f(x_1) \cdot x^5}{(\varphi(2023) - \varphi(2024)) \cdot x^3 + x + 1} = -\infty$ (πολυώνυμο στο άπειρο)

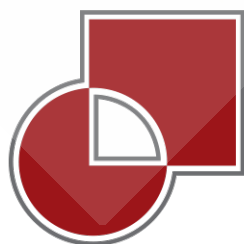
a. Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 4)

b. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει :

$$\frac{\varphi(\kappa) - \varphi(\eta\mu\kappa)}{x_0 - 1} + \frac{(f \circ f)(\kappa) - (f \circ f)(\lambda)}{x_0 - 2} = 0, \text{ αν υποθέσουμε ότι } 0 < \kappa < \lambda \text{ θετικοί}$$

πραγματικοί αριθμοί. (Μονάδες 5) (Θα μονομαχήσουν οι ημκ και x κάποια στιγμή).

Καλή Επιτυχία!



Σύγχρονη
Τομή

Το μέλλον ξεκινάει... σήμερα