

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

7 μονάδες

A2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

4 μονάδες

A3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$;

4 μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

β) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια ελάχιστη τιμή m και μια μέγιστη τιμή M

γ) Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Μια συνάρτηση f διατηρεί πάντα σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της

ε) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

10 μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+2-\sqrt{x^2+1} & , x \leq 0 \\ -x^3-x+a & , x > 0 \end{cases}$

B1. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

5 μονάδες

Για $a = 1$

B2. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

6 μονάδες

B3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 0 < x_2$

7 μονάδες

B4. Για $x > 0$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{1}{-x^3 - x + 1} = -\infty$

7 μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

5 μονάδες

Γ2. α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $x_0 = f^{-1}(0)$

6 μονάδες

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x-1+x_0)}{x-2} = \frac{f(x_0 - e^{x-1})}{x-1}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$

8 μονάδες

Γ3. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2\eta\mu f(x)}{2f(x) + \eta\mu f(x)}$

6 μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(e) - 2)x^3 + x - 1}{x^2 + 2} = +\infty$
- $f(x)(f(x) - 2) = \ln^2 x - 1$, για κάθε $x > 1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(e) < 2$

4 μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 - \ln x$, $x > 1$

7 μονάδες

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x} + f(x)$, $x > 1$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g

3 μονάδες

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 > 1$ τέτοιο, ώστε $e^{\frac{1}{x_0}} = x_0$

5 μονάδες

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 3 - |\eta \mu x|$ είναι αδύνατη, για κάθε $x > 1$

6 μονάδες

Καλή Επιτυχία!