ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1° – Συναρτήσεις

1. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\sqrt{1-x}$ και $g(x)=\ln x$.

α. Να βρείτε τη συνάρτηση $f+g$.

β. Να βρείτε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x)=h(x)-x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{\sqrt{1-\ln x}}{x^2}=1$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=e^x$ και $g(x)=\dfrac{\alpha}{x+1}$, $x>-1$ με $g(0)=1$.

α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

β. Να βρείτε την σχετική θέση των C_f και C_g στο $(-1,+\infty)$.

γ. Αν $\alpha,\beta>0$ και $\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι $e^{\alpha-1}-e^{\beta-1}<\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $(x^2+1)e^{x^2}=1$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο $(1,+\infty)$.

γ. Για κάθε $\alpha,\beta\in(1,+\infty)$ με $\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha^\alpha<\beta^\beta$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{(x^4+2)^{x^4+2}}{(x^2+4)^{x^2+4}}=1$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+e^{-x}$.

α. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .

β. Να αποδείξετε ότι $e^x+e^{-x}\ge 2\eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\sigma\upsilon\nu x$.

δ. Αν $g(x)=f(x)-2e^{-x}$, να αποδείξετε ότι η g είναι περιττή και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $g(x-1)+g(x-3)>2-x$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\dfrac{\alpha-1}{x}$ και $g(x)=x^2-3x+3$ με $f(1)=1$.

α. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y=1$.

β. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g στο διάστημα $(0,+\infty)$.

γ. Αν $h(x)=\ln x-1$, να βρείτε τη συνάρτηση $f\circ h$.

δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{g(x)-x^2}{3x}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την φ^{-1}.

6. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=1-\ln x$ και $g(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

α. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1}.

β. Να βρείτε τη συνάρτηση $g^{-1}\circ f$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $g^{-1}(f(x))=0$.

7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2-\ln\left(\sqrt{x-2}+1\right)$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=2$.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας $y=x$.

8. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$e^{f(x)}+f(x)-x=1\ ,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να βρείτε την συνάρτηση f^{-1}.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $\varepsilon: y=x$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2+2)-f(1+\text{συν}x)=0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x+x-1)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας $\varepsilon: y=x$.

ε. Να αποδείξετε ότι $x+e^x>\ln\dfrac{e^{x+1}}{1+e^x}$, για κάθε $x>0$.

10. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f(e^x+x)+f(1-2x)=0 \ , \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση

$$f^{-1}\left(f(x)-e^{x-1}+1\right)>1$$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)+f(x+1)=x+1$.

11. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$e^{f(x)}+f(x)-x=1 \ , \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(2x+1)}-e^{f(3x-2)}=3-x$.

γ. Να βρείτε την f^{-1}.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+f^{-1}(x)<1-e^x$.

12. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $B(-1,2)$.

α. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<x$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(\sqrt{x})-f(x)=\sqrt{x}-x$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση

$$f^{-1}\left(f(x)-e^x+3\right)=-1$$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f^{-1}(x)=e^x-1$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\sqrt{x}+2\right)-x=x^5$.

γ. Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι περιττή.

δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $\varepsilon: y=x$.

ε. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x-1)+x^3>f^{-1}(3-x)+2$.

14. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^3(x)+f(x)-e^x-x+1=0\ ,\quad x\in\mathbb{R}$$

α. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(f^3(x)+f(x)\right)=0$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+e^{x+1}$. Θεωρούμε γνωστό ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να λύσετε την εξίσωση $\left(f^{-1}(x)\right)^3=x^2-e^{1+f^{-1}(x)}$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $(x+\ln x-1)^3+xe^x>e$

δ. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f^{-1}.

16. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x)\left(f(x)-x\right)=x\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ. Να αποδείξετε ότι $|f^{-1}(x)-x|\le\dfrac{1}{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια, να βρείτε τα ακρότατα της $g(x)=f^{-1}(x)-x$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(8(x^2+1)^2\right)-f\left(5(x^2+1)^3-8\right)=0$.

17. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή.

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f^{-1}(x)=e^x-1$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+f^{-1}(x+1)+f^{-1}(x-1)>x$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$ και $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη.

β. Να λύσετε την εξίσωση $(x^2+1)^2+1=\dfrac{2-x^2}{(x^2+1)^3}$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f(e^x)>f(1-x^3)$, για κάθε $x>0$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $\left(f^{-1}(x)\right)^5+\left(f^{-1}(x)\right)^3+f^{-1}(x)>3$.

19. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f^3(x)+5f(x)-e^x+1=0\ ,\ \text{για κάθε}\ \ x\in\mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

γ. Να βρείτε τη συνάρτηση g για την οποία ισχύει

$$f(g(\ln x)-2)=f(x+\ln x-3)\ ,\ \text{για κάθε}\ \ x>0$$

20. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(\alpha)-f(\beta)=f(\alpha-\beta)\ ,\ \text{για κάθε}\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ ,\quad (1)$$

και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 0 .

α. Να βρείτε το $f(0)$.

β. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.

γ. Αν επιπλέον ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x<0$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x+1)+f(3x-1)<f(e^x-x)$.

21. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)\ ,\ \text{για κάθε}\ \ x,y>0$$

και η εξίσωση $f(x)=0$ που έχει μοναδική ρίζα.

α. Να βρείτε το $f(1)$.

β. Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-2)+f(x)=f(5x-6)$.

δ. Αν $f(x)<0$ για κάθε $x>1$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*$$

Να δείξετε ότι:

α. $f(1) = 1$

β. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ. Αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 1, τότε η f είναι $1-1$.

δ. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y = x$ σε ένα το πολύ σημείο, τότε η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι αντιστρέψιμη.

23. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x+y) = f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f(0) \neq 0$.

Να δείξετε ότι:

α. $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ. $f(0) = 1$

δ. $f(x) \cdot f(-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ε. Αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα, τότε η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$, για κάθε $x, y > 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – Συνέχεια Συνάρτησης

24. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$.

Να βρείτε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{f(x) + x - 3}{x^3 + 8}$

β. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^3 - 2x^2 + x}$

γ. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\sqrt{f(x)} - x)$

δ. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-\frac{1}{f(x)}} + \eta\mu\frac{1}{f(x)} \right)$

25. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$.

Να βρείτε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)(\sigma\upsilon\nu x - 1)}{x}$

β. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{e^x}$

γ. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$

δ. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 f(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

26. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\sqrt{4x^2+1}-x\le f(x)+x\le\sqrt{x^2+1}\ ,\quad \text{για κάθε } x>0$$

α. Να δείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x>0$.

Να υπολογίσετε τα όρια:

β. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *γ.* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-x}{f(x)}$ *δ.* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{f(x)+1}-1}{f(x)}$

27. Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x^2}{x}=2$.

α. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

β. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$.

γ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+x+\eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1}$.

δ. Να βρείτε το λ, ώστε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-x^3}{\lambda x^2+f^2(x)}=2$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\alpha x+2}{x-1}$, $x>1$.

α. Να βρείτε το α, ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

β. Για $\alpha=0$ και $h(x)=\ln f(x)$ να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to1} h(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x)$$

γ. Για $\alpha=0$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f^2(x)-f(x)-1|-f(x)-1}{f^2(x)(x+\eta\mu x)}$.

δ. Αν $\alpha=0$ και για τη συνάρτηση g ισχύει

$$|g(x)-f^2(x)-1|<2f(x),\quad \text{για κάθε } x>1,$$

να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

29. *α.* Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)=x-\eta\mu x$.

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha-\eta\mu\alpha$.
έχει μία, ακριβώς, λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$, για κάθε θετικό αριθμό α.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-2}+x^3-1$.

α. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και στη συνέχεια, να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(e^{x-2}+x^3+e^{-1}-9)<1$.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(e^{2-x}(x^3-8)+3\right)=8$ έχει μοναδική λύση.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{-x+1}-x-2\,, & x\le 1 \\ \ln x+x-3\,, & x>1 \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει, ακριβώς, δύο ρίζες.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)+2}{x-1}+\frac{f(\beta)+2}{x-2}=0$$

έχει, τουλάχιστον, μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{1\}$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(2^x)+f(3^x)=f(e^x)+f(\pi^x)$.

ε. Αν $\kappa\le 1\le\lambda$ και ισχύει $e^{-\kappa+1}+\lambda-1=\kappa-\ln\lambda$, να βρείτε τα κ, λ.

32. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι συνεχής και για την οποία ισχύει:

$$(x-1)f(x)=\alpha x^2+\beta x-2\,,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$.

α. Να βρείτε τις τιμές των α και β.

β. Να βρείτε τον τύπο της f.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(x)}+f(x)-1=0$.

δ. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^2(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu f(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]$

33. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και $f(1)=1$.

Έστω επιπλέον η συνάρτηση $g(x)=f^3(x)+(f\circ f)(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι αντιστρέψιμες.

α. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι αντιστρέψιμες.

β. Να δείξετε ότι $(g\circ f^{-1})(x)=x^3+f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^3+f(x)=2$.

δ. Αν η f είναι συνεχής και ισχύει $f(\alpha)+f(2\alpha)=3\alpha$, $\alpha>0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)-\alpha}{x-2\alpha}=\dfrac{f(x)-2\alpha}{x-\alpha}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\alpha, 2\alpha)$.

34. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής και γνησίως αύξουσα, για την οποία ισχύει: $x^2<f(x)<x^2+1$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

α. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y = 2x$ σ' ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+e^{-x}-1$, $x\geq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x+f(x)=e^x f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,2)$.

δ. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\ln x\right]$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu f(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]$

35. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $A=f(A)=(0,+\infty)$, η οποία αντιστρέφεται και ισχύουν:

- $f(x)\geq x$, για κάθε $x>0$
- $f^{-1}(x)\geq 1+\ln x$, για κάθε $x>0$

α. Να δείξετε ότι: $f^{-1}(x)\leq x$, για κάθε $x>0$

β. Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $x_0=1$.

γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f^{-1}(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{f^{-1}(x)}\right)$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-e^{-x}+x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{2x}+xe^x)<\dfrac{e^2+e-1}{e}$.

γ. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+\ln\alpha-1=0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(-\infty, 0)$, για κάθε $\alpha>e$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+\ln x-1$.

α. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

β. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

γ. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} τέμνει την ευθεία $y=x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,3)$.

δ. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $f^{-1}(\ln x)>x$ **ii.** $\ln\dfrac{3x^2+1}{x^2+3}>e^{x^2+2}-e^{3x^2}$

ε. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\left(f^2(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)$

38. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}-x-\alpha & , \ x<0 \\ \ln(x+1)+x-1 & , \ x\geq 0 \end{cases}$.

α. Να βρείτε την τιμή του α.

β. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες ετερόσημες.

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)+f(x)=0$ έχει, ακριβώς, τρεις ρίζες.

ε. Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)+1}{x-1}+\dfrac{f(\beta)+1}{x-2}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

39. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής, για την οποία ισχύει

$$xf(x)+\eta\mu x = x^2\eta\mu\frac{1}{x}\,, \quad \text{για κάθε } x\neq 0$$

α. Να βρείτε τον τύπο της f.

β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία, τουλάχιστον, θετική ρίζα.

δ. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=xf(x),\ x\in\mathbb{R}$ στο $x_0=0$.

40. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής, για την οποία ισχύει

$$\frac{f^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2x+2x\eta\mu x}{x^2+1}=1\,, \quad \text{για κάθε } x\geq 0$$

και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}-1)$.

α. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

β. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο x_0, όπου x_0 η ρίζα της f.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln f(x)=-\sigma\upsilon\nu x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}f\left(\frac{1}{x}\right)$.

41. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2e^{x-1}-1,\quad x>0$ και $g(x)=xe^{x-1}+1$.

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση $x^2=e^{1-x}$, στο $(0,+\infty)$.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $A(x_0, g(x_0)),\ x_0>0$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ. Έστω επιπλέον ότι ένα κινητό M κινείται στη καμπύλη $y=xe^{x-1}+1$. Καθώς το M περνάει από το σημείο A του προηγούμενου ερωτήματος, η τετμημένη x του M, αυξάνει με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $\ell=(OM)$ τη χρονική στιγμή που το κινητό M περνάει από το A.

42. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=2x^2+\ln x-1$ και $g(x)=2\ln x-1-f(x)$.

α. Να δείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(2-f(x))>1$.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

δ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,+\infty)$, ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο σημείο $A(\xi, g(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

43. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και για την οποία ισχύει $xf(x)+1=e^x$, για κάθε $x\neq 0$.

α. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

β. Να βρείτε την $f'(0)$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο $x_0=0$.

δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\ln x\ln\left(f(x)\right)\right]$.

44. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής με $f(1)=\ln(1+\sqrt{2})$ και ισχύει $e^{2f(x)}=1+2xe^{f(x)}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $x\in\mathbb{R}$.

β. Να εξετάσετε, αν η f είναι άρτια ή περιττή.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$, όπου το x_0 είναι ρίζα της f''.

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\ln(1+e^x)$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(2f'(x))}<\dfrac{e}{e+1}$.

δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f, που είναι παράλληλη στην ευθεία $x-2y+1=0$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\dfrac{2}{x-1}-1$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)\ln x=x+1$ έχει δύο ακριβώς ρίζες αντίστροφες.

δ. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=e^x$ και $h(x)=\ln x$ έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

47. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$x\left(f(x)+e^x\right)=\eta\mu x \;,\; \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\eta\mu x}{x^2}$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη C_f στο $x_0=0$.

δ. Να αποδείξετε ότι $-e^x-1<f(x)<-e^x+1$, για κάθε $x\neq 0$.

ε. Για κάθε $\alpha,\beta\neq 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)+e^\alpha+1}{x-1}-\frac{f(\beta^2)+e^{\beta^2}-1}{x-2}=0$$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1,2)$.

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{f^{-1}(x)}{1+x^2}-x^3=0$.

γ. Να δείξετε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

δ. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο 2, να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0=2$.

ε. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf^{-1}(x)-x}{xf^{-1}(x)+\eta\mu x} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$$

στ. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0\in(0,1)$, τέτοιο, ώστε

$$f^{-1}\left(1-f(x_0)\right)=0$$

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+\frac{x^2}{2}-x-1$.

α. Να δείξετε ότι η f' αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $(f')^{-1}$.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $ef'(xe^x-2017e^x)+1=0$ έχει μία, ακριβώς, ρίζα.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f''(f'(x))<e^2+1$.

δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$.

50. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{e^x}{1-x}$, $x<1$ και $g(x)=e^{2x}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1)$.

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

γ. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ εφάπτεται της C_g .

δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)\cdot ημ\frac{1}{x})$.

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-\frac{1}{2})\ln x+1$.

α. Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να δείξετε ότι η f' αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $(f')^{-1}$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $(f')^{-1}\left(\frac{2\ln x^x-1}{2x}+1\right)<1$.

δ. Ένα υλικό σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $0<x_0<1$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$ με $x\geq x_0$ με $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\geq 0$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποτεθεί $x'(t)>0$, για κάθε $t\geq 0$.